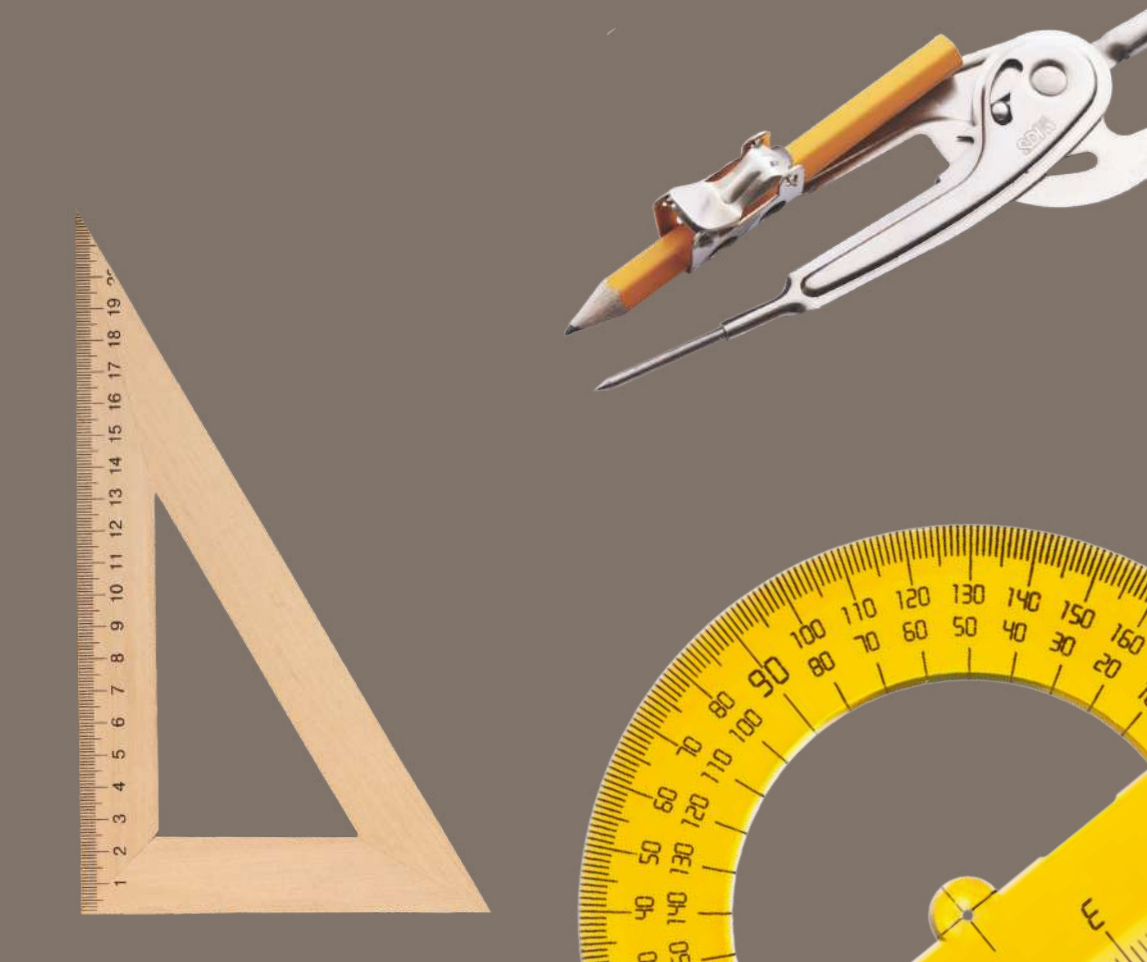




MATEMATIKA TERPADU UNTUK PERGURUAN TINGGI

Oleh :

Zaitun | Irmayani | Nurul Fuady Adhalia H

Hartina Husain | Yessy Yusnita | Rifaldy Atlant Tungga

A. Ika Putriani | Riyama Ambarwati | Aprizal Resky

Siska Andriani | Novian Riskiana Dewi

MATEMATIKA TERPADU UNTUK PERGURUAN TINGGI

**Zaitun
Irmayani
Nurul Fuady Adhalia H
Hartina Husain
Yessy Yusnita
Rifaldy Atlant Tungga
A. Ika Putriani
Riyama Ambarwati
Aprizal Resky
Siska Andriani
Novian Riskiana Dewi**



GET PRESS INDONESIA

MATEMATIKA TERPADU UNTUK PERGURUAN TINGGI

Penulis :

Zaitun
Irmayani
Nurul Fuady Adhalia H
Hartina Husain
Yessy Yusnita
Rifaldy Atlant Tungga
A. Ika Putriani
Riyama Ambarwati
Aprizal Resky
Siska Andriani
Novian Riskiana Dewi

ISBN : 978-623-125-210-4

Editor : Ari Yanto, M.Pd.

Penyunting: Yuliatrini Novita, M.Hum.

Desain Sampul dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd.

Penerbit: GET PRESS INDONESIA
Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Redaksi:

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tengah, Padang, Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, Juni 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara
apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayahNya, maka Penulisan Buku dengan judul Matematika Terpadu untuk Perguruan Tinggi dapat diselesaikan dengan kerjasama tim penulis. Matematika untuk Perguruan Tinggi merupakan buku yang membahas mengenai matematika dasar untuk pendidikan tinggi dengan topik pembahasan, yaitu: trigonometri, dimensi tiga, lingkaran, transformasi, vektor, irisan kerucut, limit fungsi aljabar, turunan fungsi aljabar, integral, peluang dan logika matematika.

Buku ini masih banyak kekurangan dalam penyusunannya. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan buku ini selanjutnya. Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian buku ini. Semoga buku ini dapat menjadi sumber referensi dan literatur yang mudah dipahami.

Padang, Mei 2024
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR i
DAFTAR ISI ii
DAFTAR GAMBAR v
DAFTAR TABEL vii
BAB 1 TRIGONOMETRI 1
 1.1 Pendahuluan 1
 1.2 Sudut dan Pengukuran 1
 1.3 Bentuk Trigonometri 6
 1.4 Identitas Trigonometri 10
 1.5 Grafik Fungsi Trigonometri 16
DAFTAR PUSTAKA 20
BAB 2 DIMENSI TIGA 21
 2.1 Pengantar Dimensi Tiga 21
 2.1.1 Definisi Dimensi Tiga 21
 2.1.2 Perbedaan Dimensi Dua dan Dimensi Tiga 21
 2.1.3 Contoh – Contoh Objek dalam Dimensi Tiga 23
 2.1 Koordinat Kartesius dalam Ruang 23
 2.2.1 Pengenalan Koordinat kartesius tiga dimensi (x, y, z) 23
 2.2.2 Representasi Grafis Titik-Titik Dalam Koordinat
 Kartesian Tiga Dimensi 24
 2.2.3 Representasi Titik-Titik Dalam Koordinat Kartesius Tiga
 Dimensi Secara Grafis Dilakukan Melalui Grafik Garis 25
 2.2.4 Pergerakan Titik dalam Ruang 26
 2.3 Jarak dan Ruang dalam Dimensi Tiga 27
 2.3.1 Pengukuran Jarak Antara Dua Titik Dalam Dimensi Tiga 27
 2.3.2 Persamaan Jarak Antara Dua Titik Dalam Ruang 35
 2.4 Sistem Koordinat Silinder dan Sistem Koordinat Bola 37
 2.4.1 Konsep Sistem Koordinat Silinder 37
 2.4.2 Konsep Sistem Koordinat Bola 39
DAFTAR PUSTAKA 42
BAB 3 LINGKARAN 45
 3.1 Pendahuluan 45
 3.2 Persamaan Lingkaran 47
 3.2.1 Persamaan Lingkaran dengan Titik Pusat O(0,0) 47
 3.2.2 Persamaan Lingkaran dengan Titik Pusat T(a, b) 49
 3.2.3 Bentuk Umum Persamaan Lingkaran 51
 3.3 Kedudukan Titik terhadap Lingkaran 53
 3.4 Kedudukan Garis terhadap Lingkaran 55
DAFTAR PUSTAKA 59
BAB 4 TRANSFORMASI 61
 4.1 Pendahuluan 61
 4.2 Translasi 62
 4.3 Refleksi 64

4.4 Rotasi	68
4.5 Dilatasi.....	72
DAFTAR PUSTAKA	75
BAB 5 VEKTOR	77
5.1 Pendahuluan.....	77
5.1.1 Deskripsi Bab	77
5.1.2 Tujuan Pembelajaran.....	77
5.1.3 Kompetensi Khusus.....	78
5.2 Penyajian.....	78
5.2.1 Pengertian Vektor	78
5.2.2 Notasi Vektor.....	79
5.2.3 Sifat - Sifat Vektor.....	80
5.2.4 Vektor Pada Bidang Datar R^2	80
5.2.5 Vektor Pada Bidang Ruang R^3	85
5.2.6 Proyeksi Vektor.....	90
DAFTAR PUSTAKA	93
BAB 6 IRISAN KERUCUT	95
6.1 Pendahuluan.....	95
6.2 Lingkaran	96
6.2.1 Persamaan Lingkaran.....	96
6.2.2 Garis Singgung Lingkaran.....	99
6.3 Parabola.....	101
6.3.1 Persamaan Umum Parabola	102
6.3.2 Persamaan Garis Singgung Parabola	104
6.4 Elips	107
6.4.1 Persamaan Elips	107
6.4.2 Persamaan Garis Singgung Elips	108
6.5 Hiperbola	110
6.5.1 Persamaan Hiperbola	111
6.5.2 Persamaan Garis Singgung Hiperbola.....	112
DAFTAR PUSTAKA	114
BAB 7 LIMIT FUNGSI ALJABAR	115
7.1 Pendahuluan.....	115
7.1.1 Permasalahan yng Merujuk pada Konsep Limit.....	115
7.1.2 Pemahaman Limit Secara Intuisi.....	116
7.1.3 Sifat-sifat Limit Fungsi Satu Titik.....	122
7.1.4 Limit Kiri dan Kanan	124
DAFTAR PUSTAKA	130
BAB 8 TURUNAN FUNGSI ALJABAR	131
8.1 Pengertian Turunan Fungsi Aljabar	131
8.2 Rumus Turunan Aljabar	132
8.2.1 Turunan Fungsi Pangkat.....	132
8.2.2 Turunan Hasil Kali Fungsi	133
8.2.3 Turunan Fungsi Pembagian.....	134
8.2.4 Turunan Pangkat dari Fungsi	137

8.2.5 Turunan Trigonometri	139
8.3 Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar	140
DAFTAR PUSTAKA.....	144
BAB 9 INTEGRAL	145
9.1 Pendahuluan	145
9.2 Integral Tak Tentu (<i>Indefinite Integral</i>).....	146
9.2.1 Konsep dan Notasi Dasar	146
9.2.2 Metode untuk Menghitung Integral Tak Tentu	148
9.3 Integral Tentu (<i>Definite Integral</i>).....	152
9.3.1 Konsep dan Notasi Integral Tentu	152
9.3.2 Interpretasi Geometris Integral Tentu.....	153
9.3.3 Teorema Fundamental Kalkulus.....	154
9.4 Aplikasi Integral	155
9.4.1 Menghitung Volume Benda Putar	155
DAFTAR PUSTAKA.....	162
BAB 10 PELUANG	163
10.1 Pendahuluan	163
10.2 Ruang Sampel	164
10.2.1 Ruang Sampel Diskrit dan Kontinu	165
10.2.2 Peristiwa (Kejadian).....	165
10.3 Konsep Peluang.....	169
10.4 Peluang Bersyarat.....	172
10.4.1 Perhitungan Peluang Bersyarat.....	173
10.4.2 Perkalian Peluang Bersyarat.....	173
10.4.3 Peluang Dua Kejadian Saling Bebas	174
10.4.4 Peluang Tiga Kejadian Saling Bebas	174
10.5 Dalil Bayes.....	174
DAFTAR PUSTAKA.....	176
BAB 11 LOGIKA MATEMATIKA	177
11.1 Pendahuluan	177
11.2 Pengertian Logika	178
11.3 Pernyataan dan Bukan Pertanyaan.....	179
11.4 Negasi (Ingkaran) Suatu Pernyataan	180
11.5 Pernyataan Majemuk	181
11.6 Konvers, Invers, dan Kontraposisi	183
11.7 Pembuktian Matematika.....	184
11.7.1 Pembuktian Langsung	185
11.7.2 Pembuktian Tak Langsung	185
11.8 Induksi Matematika	187
DAFTAR PUSTAKA.....	190
BIODATA PENULIS.....	191

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1 Bentuk Sudut θ Dalam Lingkaran	3
Gambar 1. 2 Geometri Besaran 1 Rad.....	4
Gambar 1. 3 (a) Nilai Sudut Positif. (b) Nilai Sudut Negatif.....	5
Gambar 1. 4 Tiga Nilai Sudut Berbeda dengan Posisi yang Sama.....	5
Gambar 1. 5 Gambar Segita Sudut Lancip.....	6
Gambar 1. 6 Sistem Koordinat Yang Menunjukkan θ Secara Umum	6
Gambar 1. 7 Nilai Eksak Dari Trigonometri.....	7
Gambar 1. 8 Geometri Sudut $\theta = \frac{3}{4}\pi$	8
Gambar 1. 9 Gambar 4 Kuadran Bidang Koordinat Kartesian.....	9
Gambar 1. 10 Geometri Trigonometri.....	10
Gambar 1. 11 Identitas Trigonometri.....	12
Gambar 1. 12 Grafik Fungsi $y = \sin x$	17
Gambar 1. 13 Grafik Fungsi $y = \cos x$	17
Gambar 1. 14 Grafik Fungsi $y = \tan x$	18
Gambar 1. 15 Grafik Fungsi $y = \cot x$	18
Gambar 1. 16 Grafik Fungsi $y = \operatorname{cosec} x$	18
Gambar 1. 17 Grafik Fungsi $y = \sec x$	19
Gambar 2. 1 Sistem Koordinat Kartesian 3 Dimensi.....	24
Gambar 2. 2 Koordinat Kartesian Model 3 Dimensi.....	25
Gambar 2. 3 Koordinat Kartesian Model 3 Dimensi.....	25
Gambar 2. 4 Jarak Bidang.....	27
Gambar 2. 5 Bangun Limas Segitiga	28
Gambar 2. 6 Proyeksi Titik Pada Bidang	29
Gambar 2. 7 Ilustrasi Jarak Titik Pada Bidang	29
Gambar 2. 8 Jarak Garis Dengan Garis	31
Gambar 2. 9 Jarak Garis Dengan Bidang.....	32
Gambar 2. 10 Jarak Bidang Dengan Bidang	34
Gambar 2. 11 Jarak Antara Titik Dalam Ruang	35
Gambar 2. 12 Sistem Koordinat Silinder.....	37
Gambar 2. 13 Sistem Koordinat Silinder	39
Gambar 3. 1 Unsur-unsur Lingkaran (Sumber : GeoGebra)	45
Gambar 3. 2 Lingkaran L dengan Titik Pusat O	47
Gambar 3. 3 Lingkaran L Berpusat di T(a,b)	49
Gambar 3. 4 Lingkaran L Berpusat di T(2 2) Berjari-jari 3	53
Gambar 3. 5 Garis h Tidak Memotong/Menyinggung Lingkaran L.....	56
Gambar 3. 6 Garis h Memotong/Menyinggung Lingkaran L	56
Gambar 3. 7 Garis h Memotong Lingkaran L di Dua Titik Berlainan	57
Gambar 3. 8 Garis h Tidak Berpotongan dengan Lingkaran L.....	58
Gambar 6. 1 Irisan Kerucut terhadap Bidang	95
Gambar 6. 2 Lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r	96
Gambar 6. 3 Hiperbola dengan Pusat (0,0).....	110
Gambar 7. 1 Limit fungsi f	117

Gambar 7. 2 Grafik Fungsi $j(x) = \frac{|2x|}{2x}$ 125

Gambar 10. 1 Permainan Ular Tangga..... 163

Gambar 10. 2 Diagram Venn Kejadian $A \cap B$ dan $A \cup B$ 171

Gambar 11. 1 Resep Kue Menggunakan Perbandingan Matematika 177

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1 Perbedaan Dimensi Dua dan Dimensi Tiga	22
Tabel 4. 1 Persamaan Matriks Refleksi.....	66
Tabel 4. 2 Persamaan Matriks Rotasi	70
Tabel 4. 3 Persamaan Matriks Dilatasi.....	73
Tabel 5. 1 Perbedaan Vektor dan Skalar	78
Tabel 5. 2 Notasi Vektor (Sumber : Jumini, 2018)	79
Tabel 9. 1 Rumus Integral Dasar.....	147
Tabel 11. 1 Tabel Nilai Kebenaran Negasi Suatu Pernyataan.....	180
Tabel 11. 2 Nilai Kebenaran Pada Konjungsi	181
Tabel 11. 3 Nilai Kebenaran Pada Disjungsi.....	182
Tabel 11. 4 Nilai Kebenaran Pada Implikasi.....	182
Tabel 11. 5 Nilai Kebenaran Pada Biimplikasi.....	183
Tabel 11. 6 Bentuk Pernyataan Baru	183
Tabel 11. 7 Nilai Kebenaran Konvers, Invers, dan Kontraposisi	184

BAB 1

TRIGONOMETRI

Oleh Zaitun

1.1 Pendahuluan

Trigonometri merupakan suatu topik yang membahas keterhubungan antara sudut dan sisi segitiga. Dalam kamus aljabar, aritmatika, dan trigonometri oleh (Steven G. Krantz, 2001), trigonometri merupakan metode dalam penyelesaian segitiga. Trigonometri mempelajari fungsi-fungsi seperti sinus ($\sin$), kosinus ($\cos$), dan tangen ($\tan$) yang menghubungkan rasio sisi-sisi dalam segitiga dengan sudut dalam fungsi tersebut, serta fungsi kosekan (cosec), sekan ($\sec$), dan kotangen ($\cot$) yang merupakan masing-masing kebalikannya. Lebih lanjut dengan hukum sinus dan kosinus, trigonometri dapat diterapkan pada segitiga sembarang, sehingga memperluas penggunaannya dalam situasi ketika melakukan pengukuran secara langsung tidak memungkinkan.

1.2 Sudut dan Pengukuran

Sudut merupakan pengukuran dari perputaran dua garis yang tepat bertemu di ujungnya atau perpotongannya. Konsep sudut merupakan hal paling dasar dalam geometri untuk menyatakan suatu perputaran (geometri lingkaran) atau arah dalam konteks matematika. Sudut diukur dalam satuan derajat atau radian (rad), dengan satu putaran penuh dalam lingkaran sama dengan 360° atau ukuran tersebut sama dengan 2π rad.

Sehingga persamaan matematis dari hubungan antara derajat dan radian dapat dibentuk menjadi

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \tag{1.1}$$

bentuk tersebut secara implisit menyatakan $180^\circ = \pi \text{ rad}$, sehingga didapatkan bentuk penurunan Persamaan (1. 1) yaitu

- 1. $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad}.$
- 2. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$

Contoh 1: Ubah bentuk 90° ke bentuk radian.

Jawab:

$$90^\circ = 90 \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Contoh 2: Tentukan bentuk $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ ke dalam bentuk derajat.

Jawab:

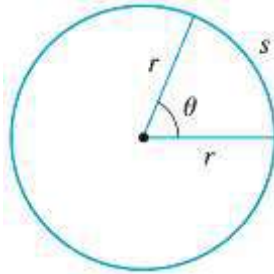
$$\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 120^\circ$$

Hubungan antara ukuran radian dan derajat dalam beberapa besaran sudut ditunjukkan pada daftar berikut.

Radian	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Derajat	0	30	45	90	120	150	180	270	360

Secara umum, sudut diukur dengan bentuk derajat karena secara intuitif dapat ditentukan bentuk geometrinya. Penggunaan radian termasuk juga penting dalam kajian geometri lingkaran sehingga dapat dijadikan suatu bentuk lain dari ukuran derajat. Pada gambar berikut menunjukan suatu

bagian lingkaran dengan sudut θ dalam radian, jari-jari bernilai r dan memiliki panjang busur s .



Gambar 1. 1 Bentuk Sudut θ Dalam Lingkaran.

(Sumber: james stewart)

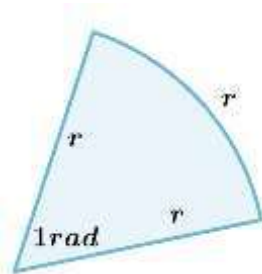
Dari gambar tersebut nilai dari θ sebenarnya sangat berhubungan atau dengan kata lain adalah proporsional dengan nilai dari s . Diketahui bahwa keliling sepanjang lingkaran tersebut adalah $2\pi r$ mengindikasikan nilai sudut satu putaran penuh lingkaran adalah 2π rad, sehingga

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \quad (1.2)$$

Dari bentuk di atas, dapat ditentukan hubungan besaran sudut θ dalam radian dengan nilai panjang busur s yaitu

$$s = \theta r$$

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (1.3)$$



Gambar 1. 2 Geometri Besaran 1 Rad

Dalam keadaan besaran nilai dari $s = r$ dalam persamann (1. 3), akan memberikan nilai $\theta = 1\text{rad}$, dalam artian bahwa 1rad mengindikasikan nilai panjang busur lingkaran s sama dengan nilai jari-jari lingkaran r .

Contoh 3: Hitung panjang busur lingkaran yang berjari-jari 9cm dengan sudut $\frac{2}{3}\pi$ rad.

Jawab:

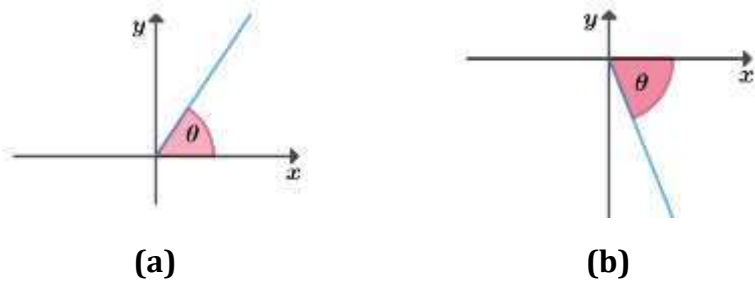
$$s = \theta r = \left(\frac{2}{3}\pi\right) (9) = 6\pi \approx 18.84 \text{ cm}$$

Contoh 4: Berapakah besar sudut yang terbentuk dalam lingkaran berjari-jari 8cm untuk panjang busur 12cm.

Jawab:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ rad}$$

Besaran nilai dari suatu sudut dihitung mulai dari bagian awal yang merupakan garis sumbu-x positif. Ketika suatu garis sejajar dengan bagian awal tersebut, maka tidak ada sudut yang terbentuk atau dengan kata lain besar sudut antara garis tersebut terhadap garis sumbu-x positif adalah nol (0°). Secara umum, besaran sudut bernilai positif atau negatif dapat dilihat dari putaran suatu garis dimulai dari bagian awal dalam hal ini garis sumbu-x positif.

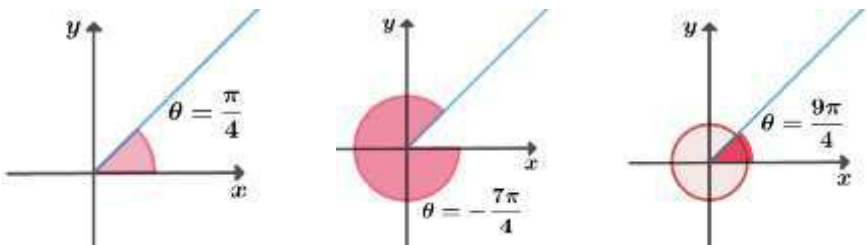


Gambar 1.3 (a) Nilai Sudut Positif. (b) Nilai Sudut Negatif

Pada gambar 1.3(a) menunjukkan besaran sudut yang positif akibat dari putaran garis yang berlawanan arah jarum jam hingga pada suatu posisi tetap. Sebaliknya apabila putaran garis searah dengan arah jarum jam hingga pada suatu posisi tetap, ini menunjukkan nilai besaran sudut yang negatif ditunjukkan pada gambar 1.3(b). Perlu diketahui bahwa beberapa besaran sudut yang berbeda dapat memiliki posisi garis yang sama hasil perputaran terhadap sumbu-x positif. Misalnya pada sudut $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{7}{4}\pi$, dan $\frac{9}{4}\pi$, memiliki posisi yang sama karena bentuk dari:

- $\frac{1}{4}\pi - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$
- $\frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$

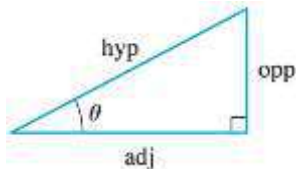
Yang dapat dilihat secara geometri pada gambar berikut



Gambar 1.4 Tiga Nilai Sudut Berbeda dengan Posisi yang Sama

1.3 Bentuk Trigonometri

Fungsi trigonometri mendefinisikan enam bentuk dari nilai rasio panjang sisi-sisi segitiga. Gambar berikut memperlihatkan bentuk segitiga dan posisi sudut θ (GetX Press, 2020).



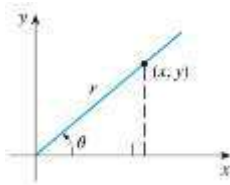
Gambar 1. 5 Gambar Segita Sudut Lancip.

Didefinisikan enam bentuk fungsi trigonometri berikut:

$$\sin \theta = \frac{Depan}{Miring}$$
$$\cos \theta = \frac{Samping}{Miring}$$
$$\tan \theta = \frac{Depan}{Samping}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{Miring}{Depan}$$
$$\sec \theta = \frac{Miring}{Samping}$$
$$\cot \theta = \frac{Samping}{Depan}$$

Definisi ini tidak cukup untuk menunjukkan sudut tertentu seperti sudut tumpul atau sudut yang bernilai negatif, sehingga perlu dibentuk sudut θ secara umum. Misalkan r adalah panjang sisi dari titik asal (O) ke suatu titik ($x\ y$) sembarang pada sistem koordinat sehingga membentuk sudut θ terhadap sumbu- x positif.



Gambar 1. 6 Sistem Koordinat Yang Menunjukkan θ Secara Umum

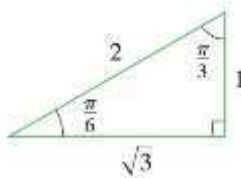
Dari enam definisi fungsi trigonometri sebelumnya, dapat didefinisikan bentuk fungsi trigonometri berikut

$$\begin{array}{ll} \sin \theta = \frac{y}{r} & \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} & \sec \theta = \frac{r}{x} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} & \cot \theta = \frac{x}{y} \end{array}$$

Bentuk di atas memungkinkan nilai tak terdefinisi, yaitu ketika $x = 0$ maka $\tan \theta$ dan $\sec \theta$ tidak terdefinisi, dan ketika $y = 0$ maka $\operatorname{cosec} \theta$ dan $\cot \theta$ tidak terdefinisi.

Catatan: Dalam perhitungan nilai dari fungsi trigonometri, perlu dituliskan detail dari satuan ukur sudut. Jika θ merupakan bilangan maka θ menunjukkan nilai sudut dalam radian,

- $\sin 2 \approx 0,0348995$
- $\sin 2^\circ \approx 0,9092974$



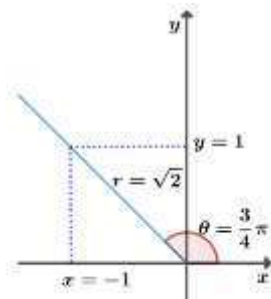
Gambar 1. 7 Nilai Eksak Dari Trigonometri

Bentuk eksak dari trigonometri ditunjukkan dari Gambar 1.7 sehingga nilai rasio trigonometri untuk masing-masing sudut adalah sebagai berikut

$$\begin{array}{llll} \sin \frac{1}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \operatorname{cosec} \frac{1}{3} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}} & \sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2} & \operatorname{cosec} \frac{1}{6} \pi = 2 \\ \cos \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{2} & \sec \frac{1}{3} \pi = 2 & \cos \frac{1}{6} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sec \frac{1}{6} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan \frac{1}{3} \pi = \sqrt{3} & \cot \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{\sqrt{3}} & \tan \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{\sqrt{3}} & \cot \frac{1}{6} \pi = \sqrt{3} \end{array}$$

Contoh 3: Untuk $\theta = \frac{3}{4}\pi$, hitung nilai eksak rasio trigonometri dari θ .

Jawab: dari konsep sudut dan ukuran untuk $\theta = \frac{3}{4}\pi$, dapat dipilih panjang $r = \sqrt{2}$, $x = -1$, dan $y = 1$. Sehingga dari definisi dapat dituliskan bentuk rasio trigonometrinya



Gambar 1. 8 Geometri Sudut $\theta = \frac{3}{4}\pi$

$$\sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}$$

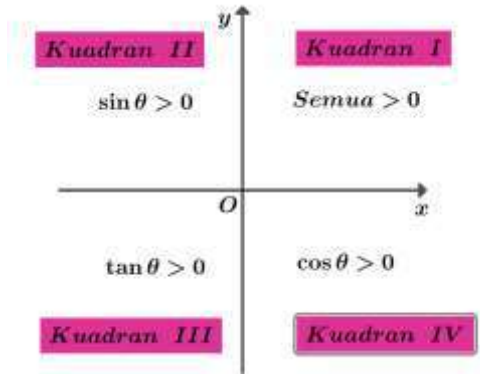
$$\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sec \frac{3}{4}\pi = -\sqrt{2}$$

$$\tan \frac{3}{4}\pi = -1$$

$$\cot \frac{3}{4}\pi = -1$$

Tanda nilai dari fungsi trigonometri untuk semua sudut di dalam empat kuadran ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 1. 9 Gambar 4 Kuadran Bidang Koordinat Kartesian

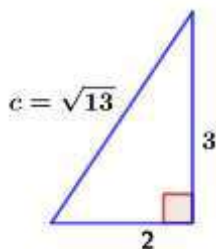
Berikut nilai dari fungsi trigonometri untuk beberapa sudut:

θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sim$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\sim$	0

Contoh 3: Diketahui nilai $\tan \theta = \frac{3}{2}$ untuk sudut θ positif pada kuadran I, tentukan nilai fungsi trigonometri lainnya dari definisi fungsi trigonometri (5 fungsi trigonometri).

Jawab: konsep tangen memberikan informasi bahwa pada kuadran I terdapat segitiga dengan panjang sisi depan sudut 3 dan sisi samping sudut 2. Dengan memisalkan c adalah sisi

miring segitiga, melalui Teorema segitiga pythagoras $c^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, jadi $c = \sqrt{13}$.



Gambar 1. 10 Geometri Trigonometri

Selanjutnya dapat kita tentukan lima fungsi trigonometri sebagai berikut

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\cot \theta = \frac{2}{3}$$

1.4 Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri merupakan keterkaitan antara fungsi trigonometri yang dapat digunakan sebagai alternatif penyederhanaan atau pemecahan bentuk trigonometri yang relatif sulit. Identitas dasar dari bentuk fungsi trigonometri dapat ditulis sebagai berikut:

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Identitas selanjutnya yang cukup sederhana yaitu dari Gambar 1.6, teorema Pythagoras menyatakan bahwa nilai $x^2 + y^2 = r^2$, kemudian kedua ruas dikalikan dengan $1/r^2$ sehingga

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Dengan $\frac{x}{r} = \cos \theta$, $\frac{y}{r} = \sin \theta$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (1.4)$$

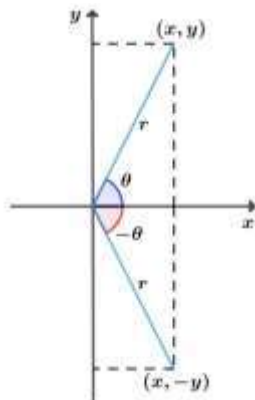
Dengan mengalikan kedua buah ruas dengan $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ maka persamaan (1.4) menjadi

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad (1.5)$$

Jika dengan cara yang identik untuk pengali $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ maka persamaan (1.5) adalah

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (1.6)$$

Identitas lain yang cukup sederhana yang lain adalah sudut yang bernilai negatif dapat diturunkan melalui Gambar 1.9



Gambar 1. 11 Identitas Trigonometri

$$\sin(-\theta) = -\frac{y}{r}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad (1.7)$$

Serta untuk kosinus

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad (1.8)$$

Apabila ditinjau pada kuadran I bahwa semua nilai fungsi trigonometri bernilai positif, sudut θ dan $(\theta + 2\pi)$ memiliki posisi yang sama sehingga dapat ditulis

$$\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi) \quad (1.9)$$

$$\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi) \quad (1.10)$$

$$\tan \theta = \tan(\theta + 2\pi) \quad (1.11)$$

Konsekuensi dari identitas yang telah kita kenal sebelumnya adalah dapat menurunkan persamaan penjumlahan sudut dalam fungsi trigonometri.

Identitas penjumlahan sudut sinus: dengan saling mengalikan persamaan (1. 9) dengan persamaan (1. 10) maka

$$\sin \theta \cdot \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \cdot \sin(\theta + 2\pi)$$

$$0 = \sin \theta \cdot \cos(\theta + 2\pi) - \cos \theta \cdot \sin(\theta + 2\pi)$$

Mengubah bentuk dari $\sin(0) = \sin(\theta - \theta + 2\pi) = 0$ kemudian dengan mengubah $\theta = A$ dan $\theta + 2\pi = B$ maka

$$\sin(\theta - \theta + 2\pi) = \sin \theta \cdot \cos(\theta + 2\pi) - \cos \theta \cdot \sin(\theta + 2\pi)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B \quad (1.12)$$

apabila mengubah B menjadi $-B$ maka

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos(-B) - \cos A \cdot \sin(-B)$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \quad (1.13)$$

Identitas penjumlahan sudut kosinus: diketahui bahwa pada sudut $\theta = \frac{\pi}{4}$, nilai dari sinus dan kosinus sama serta dengan menggunakan identitas pada persamaan (1. 9) dan (1. 10)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right)$$

Dengan mengalikan masing-masing kedua ruas

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right)$$

$$0 = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right)$$

Mengubah bentuk dari $\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = 0$ kemudian mengubah $\frac{\pi}{4}$ menjadi variabel A dan $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ menjadi B , maka

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \quad (1.14)$$

Apabila mengubah B menjadi $-B$, bentuk di atas menjadi

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos(-B) - \sin A \cdot \sin(-B)$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \quad (1.15)$$

Identitas penjumlahan sudut tangen: identitas tangen dapat dengan mudah ditentukan dari hasil pembagian fungsi sinus dan kosinus

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$$

Ruas kanan di manipulasi dengan mengalikan masing-masing dengan $\frac{1}{\cos A \cos B}$

$$\tan(A + B) = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B} \cdot \frac{\frac{1}{\cos A \cos B}}{\frac{1}{\cos A \cos B}}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\cos B}{\cos B} + \frac{\cos A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos A}{\cos A} \cdot \frac{\cos B}{\cos B} - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \quad (1.16)$$

Dengan mengganti B menjadi $-B$ maka

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \cdot \tan(-B)}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} \quad (1.17)$$

Persamaan sudut identik: sudut identik fungsi trigonometri dibentuk dari sudut A dan B identic, fungsi sinus pada persamaan (1. 13) menjadi

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin 2A = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A \quad (1.18)$$

dan untuk fungsi kosinus yaitu persamaan (1. 14) dibentuk menjadi

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos 2A = \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad (1.19)$$

Dari persamaan (1. 4) disubstitusi ke dalam persamaan (1. 19) maka

$$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 \quad (1.20)$$

Atau

$$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A \quad (1.21)$$

Dari persamaan sudut identik, dapat diturunkan persamaan $\sin^2 A$ dan $\cos^2 A$ berikut

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \quad (1.22)$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2} \quad (1.23)$$

Persamaan perkalian fungsi trigonometri: dari persamaan (1.12) - (1.15) dapat dibentuk persamaan perkalian fungsi trigonometri. Apabila persamaan (1.12) dan persamaan (1.13) dijumlahkan maka

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)] \quad (1.24)$$

Kemudian untuk persamaan (1.14) dan persamaan (1.15) dijumlahkan maka

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \quad (1.25)$$

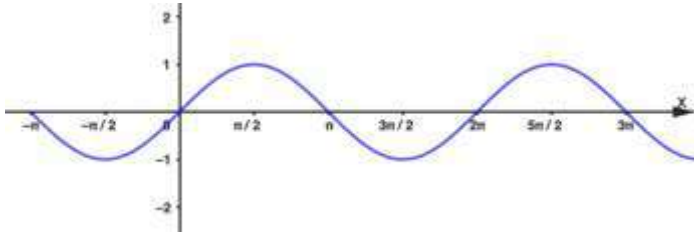
Apabila dikurangkan, maka

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

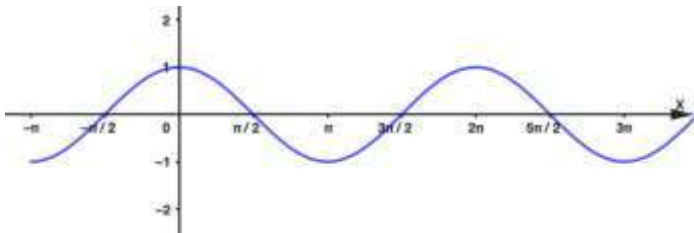
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad (1.26)$$

1.5 Grafik Fungsi Trigonometri

Grafik fungsi trigonometri dibentuk dari visualisasi dalam bidang kartesius. Dengan memetakan nilai dari fungsi trigonometri pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$ sehingga pola dari kurva dapat terlihat secara periodik.



Gambar 1. 12 Grafik Fungsi $y = \sin x$



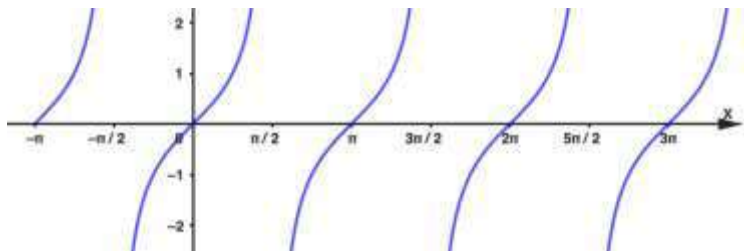
Gambar 1. 13 Grafik Fungsi $y = \cos x$

Pada grafik fungsi sinus $y = \sin x = 0$, nilai nol dari fungsi terjadi ketika $x = k\pi$ dengan k adalah bilangan bulat. Pada fungsi kosinus $y = \cos x = 0$, pada grafiks sinus digeser sejauh $\frac{\pi}{2}$ ke kiri. Fungsi sinus dan kosinus memiliki domain sepanjang bilangan riil $(-\infty \infty)$ dengan range pada interval tutup $[-1 \ 1]$, dapat ditulis sebagai berikut

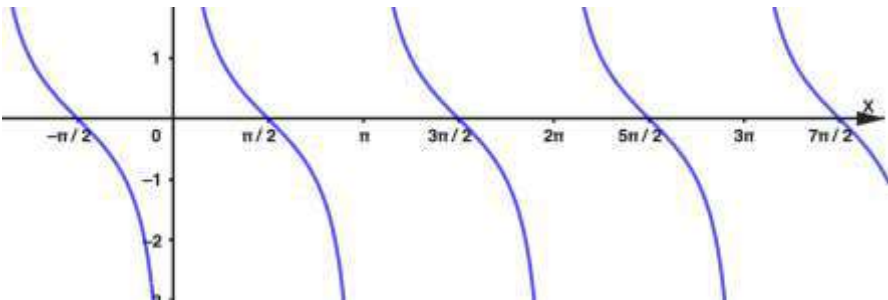
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Grafik fungsi tangen dan kotangen memiliki range $(-\infty \infty)$ yang memiliki kurva periodik dengan periode π .

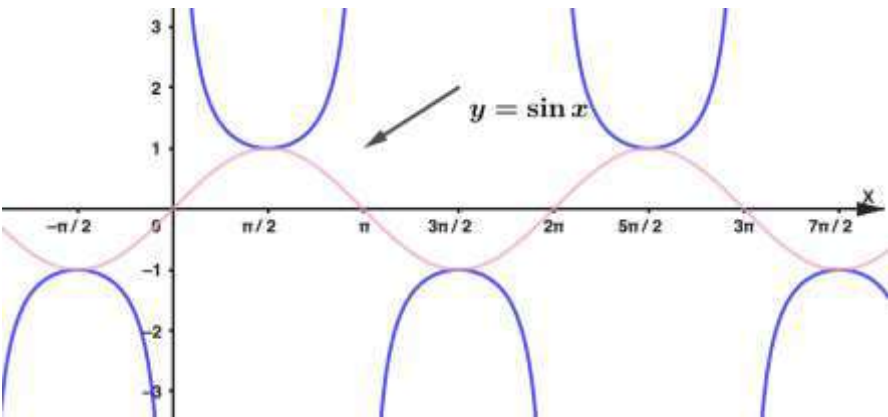


Gambar 1. 14 Grafik Fungsi $y = \tan x$

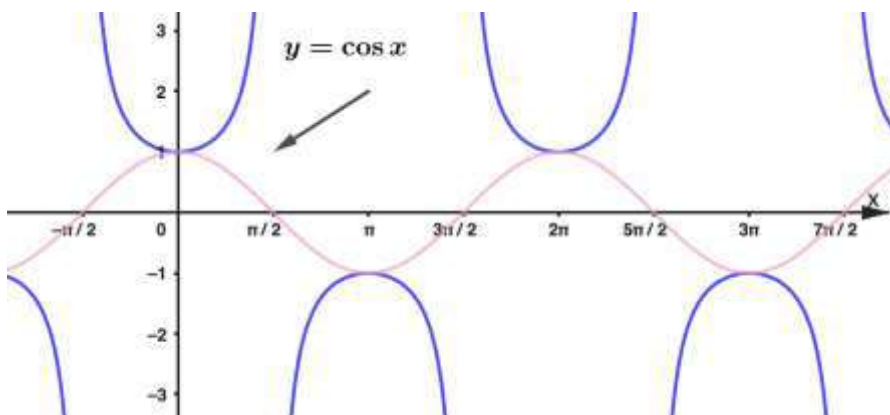


Gambar 1. 15 Grafik Fungsi $y = \cot x$

Grafik fungsi sekan dan kosekan memiliki range $(-\infty -1] \cup [1 \infty)$, dengan fungsi ini memiliki kurva periodik yang besar periodenya 2π .



Gambar 1. 16 Grafik Fungsi $y = \operatorname{Cosec} x$



Gambar 1.17 Grafik Fungsi $y = \sec x$

DAFTAR PUSTAKA

- Douglas N. Clark, 2001. DICTIONARY OF ALGEBRA, ARITHMETIC, AND TRIGONOMETRY. CRC Press.
- Stewart, J. Calculus. 2016. Calculus. Early Transcendentals 7th edition. Cengage Learning.
- Varberg, E. J. Purcell, S.E. Rigdon, 2007, Calculus 9th edition, PEARSON, Prentice Hall.

BAB 2

DIMENSI TIGA

Oleh Irmayani

2.1 Pengantar Dimensi Tiga

2.1.1 Definisi Dimensi Tiga

Geometri tiga dimensi merupakan cabang geometri yang mengkaji struktur ruang atau bentuk tiga dimensi menggunakan objek-objek yang lebih konseptual. Tiga dimensi dalam bidang matematika mengacu pada analisis elemen-elemen dalam ruang, seperti panjang, posisi, jarak, dan sudut. Ini menyertakan pengetahuan tentang bentuk-bentuk dalam ruang dua dimensi dan tiga dimensi, serta penerapan prinsip Pythagoras untuk menghitung jarak atau posisi relatif antara titik-titik. Objek-objek dalam geometri tiga termasuk titik, garis, bidang, balok, kubus, bola, dan lainnya, yang semuanya dihasilkan melalui proses abstraksi dari objek-objek konkret yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. (Fajriadi, Priyadi, and Rahayu 2022)

2.1.2 Perbedaan Dimensi Dua dan Dimensi Tiga

Dimensi adalah ide yang dipakai untuk menjelaskan jumlah koordinat yang diperlukan guna menetapkan lokasi suatu objek dalam ruang. Dimensi dua merujuk pada objek yang terdefinisi oleh dua koordinat saja, yang mewakili panjang dan lebar. Objek-objek ini disebut sebagai bangun datar, seperti persegi, segitiga, dan lingkaran. Bangun datar

hanya memiliki dua dimensi atau sisi dan tidak memiliki ketebalan, sehingga mereka terbatas pada representasi dalam dua dimensi saja tanpa kedalaman. Contoh dimensi dua adalah gambar di atas kertas, bayangan di dinding dan peta.

Dimensi tiga merupakan objek yang ditentukan oleh tiga koordinat, meliputi panjang, lebar, dan tinggi. Contoh objek dalam dimensi tiga termasuk kubus, bola, dan piramida, yang dikenal sebagai bangun ruang. Bangun ruang memiliki tiga dimensi atau sisi dan memiliki ketebalan atau volume, memungkinkan mereka untuk dijelaskan dengan menggunakan tiga dimensi ruang.

Tabel 2. 1 Perbedaan Dimensi Dua dan Dimensi Tiga

Fitur	Dimensi Dua	Dimensi Tiga
Koordinat	Panjang, lebar	Panjang, lebar, tinggi
Bentuk	Permukaan datar	Objek dengan volume
Aplikasi	Seni rupa dua dimensi (lukisan, gambar, fotografi)	Seni rupa tiga dimensi (patung, instalasi seni, arsitektur)
Dimensi tambahan	Luas	Luas, volume
Sisi	2	3
Ketebalan	Tidak ada	Ada
Contoh	Gambar, bayangan, peta, Segitiga, persegi, lingkaran, garis	Kubus Rubik, bola sepak, patung

2.1.3 Contoh – Contoh Objek dalam Dimensi Tiga

Objek dalam dimensi tiga memiliki dimensi panjang, lebar, dan tinggi, serta memiliki volume. Mereka dapat diilustrasikan dalam ruang tiga dimensi. Berikut beberapa contoh objek dimensi tiga

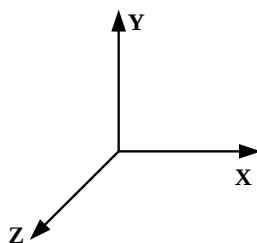
Seperti titik, garis, bidang, kubus, balok, bola, dan lain sebagainya, semuanya merupakan objek-objek yang dihasilkan melalui proses abstraksi dari objek-objek konkret yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari. (Ovinka and Hartati 2020)

2.1 Koordinat Kartesian dalam Ruang

2.2.1 Pengenalan Koordinat kartesian tiga dimensi (x. y. z)

Garis, bidang, dan ruang secara berurutan disebutkan sebagai ruang satu dimensi, ruang dua dimensi, dan ruang tiga dimensi, dengan masing-masing ditandai oleh jumlah sumbu yang berkorespondensi: satu sumbu untuk garis, dua sumbu tegak lurus untuk bidang datar, dan tiga sumbu tegak lurus untuk ruang. (Yuniar Hakkun and Mohamad 2015).

Sebuah titik pada garis didefinisikan oleh satu komponen, sementara bidang dihubungkan dengan dua komponen, yaitu sumbu x dan y , yang diwakili oleh koordinat (x, y) . Sebaliknya, ruang dikaitkan dengan tiga komponen, yaitu sumbu x , sumbu y , dan sumbu z , yang ditunjukkan oleh koordinat (x, y, z) .



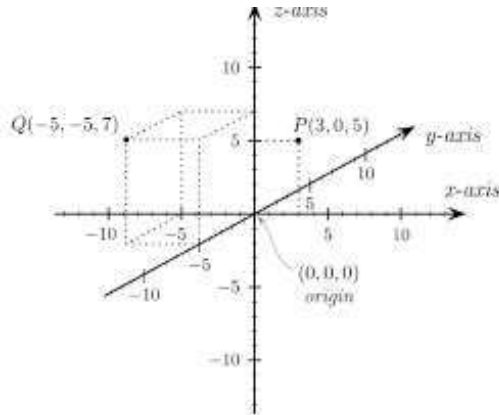
Gambar 2. 1 Sistem Koordinat Kartesian 3 Dimensi

2.2.2 Representasi Grafis Titik-Titik Dalam Koordinat Kartesian Tiga Dimensi

Sistem koordinat Kartesius tiga dimensi berguna untuk menetapkan posisi suatu titik dalam ruang tiga dimensi. Ruang ini terdiri dari tiga sumbu utama: X, Y, dan Z. Setiap titik dalam ruang ini direpresentasikan oleh tiga koordinat, yakni x , y , dan z , yang mewakili jaraknya dari titik awal $(0, 0, 0)$ pada masing-masing sumbu. (Widyaningrum and Mulyana 2020)

Representasi titik-titik dalam koordinat kartesius tiga dimensi secara grafis dilakukan melalui model 3 Dimensi sebagai berikut: (Widyaningrum and Mulyana 2020)

1. Titik-titik direpresentasikan sebagai titik dalam ruang tiga dimensi virtual.
2. Model 3D dapat diputar dan diperbesar agar dapat dilihat dari berbagai sudut.
3. Metode ini sering digunakan dalam desain grafis dan animasi

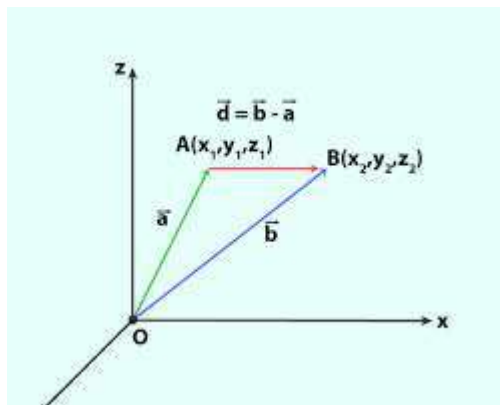


Gambar 2. 2 Koordinat Kartesius Model 3 Dimensi

Sumber : <https://ca.m.wikipedia.org/>

2.2.3 Representasi Titik-Titik Dalam Koordinat Kartesius Tiga Dimensi Secara Grafis Dilakukan Melalui Grafik Garis Sebagai Berikut:

1. Titik-titik dihubungkan dengan garis untuk menunjukkan hubungan antar titik.
2. Grafik garis dapat digunakan untuk menunjukkan pola dan tren dalam data tiga dimensi.



Gambar 2. 3 Koordinat Kartesius Model 3 Dimensi

Sumber : <https://www.geeksforgeeks.org/>

2.2.4 Pergerakan Titik dalam Ruang

Pergerakan titik dalam ruang merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika dan fisika. Pergerakan titik dalam ruang menjelaskan konsep posisi suatu titik berubah seiring waktu dalam ruang tiga dimensi. (Alghadari 2017)

Vektor perpindahan merupakan konsep yang menggambarkan perubahan posisi suatu titik dari satu titik awal ke titik akhir. Vektor ini memiliki dua atribut penting: arah dan besar, yang dapat direpresentasikan dengan menggunakan simbol panah. (Ndruru 2020).

Kecepatan merupakan tingkat perubahan posisi suatu titik selama periode waktu tertentu. Kecepatan memiliki dua aspek penting, yaitu arah dan besaran, dan biasanya diukur dalam satuan meter per detik (m/s). (Djohan 2017).

Percepatan menggambarkan seberapa cepat kecepatan suatu objek berubah. Jika kecepatan objek bertambah, berkurang, atau mengubah arahnya, objek tersebut mengalami percepatan. Besaran percepatan menggambarkan seberapa besar perubahan kecepatan objek dalam satuan waktu, sedangkan arahnya menunjukkan arah perubahan kecepatan tersebut. Satuan standar untuk percepatan adalah meter per detik kuadrat (m/s^2), yang menunjukkan perubahan kecepatan per detik (Young 2015).

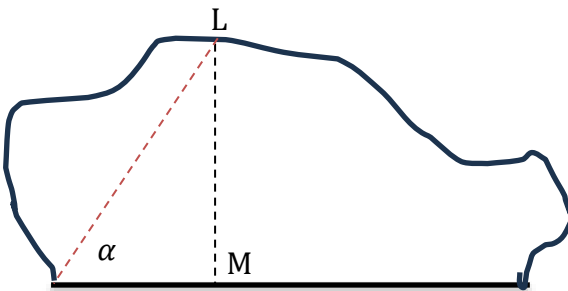
2.3 Jarak dan Ruang dalam Dimensi Tiga

2.3.1 Pengukuran Jarak Antara Dua Titik Dalam Dimensi Tiga

- a. jarak antara titik dengan garis.

Jarak antara titik dan garis adalah panjang lintasan lurus terpendek yang menghubungkan titik tersebut dengan garis. Jarak ini tidak pernah negatif dan dapat dihitung dengan berbagai metode, bergantung pada posisi titik dan karakteristik garis (Suryani 2017)

Titik L dan garis k akan ditentukan jarak antara titik L dan garis k bila $L \notin k$,

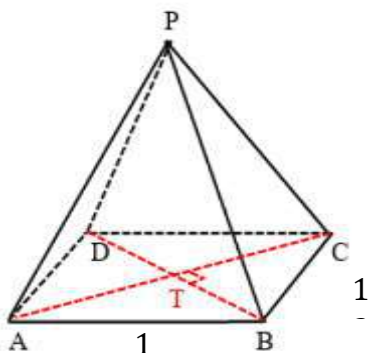


Gambar 2. 4 Jarak Bidang

Melalui titik L dan garis k dibuat bidang α . Pada bidang α dibuat garis yang melalui L dan tegak lurus garis k dan memotong garis k di titik M . Maka jarak LM merupakan jarak antara titik L dan garis k .

Contoh:

- perhatikan bangun ruang limas segitiga berikut. Tentukan jarak antara titik A ke garis BD



Gambar 2. 5 Bangun Limas Segitiga

Penyelesaian:

ABCD merupakan persegi. Maka AC dan BD berpotongan tegak lurus dan berada di tengah. Karena itu jarak titik A ke BD dengan panjang AT sebagai berikut

$$AT = \frac{1}{2} AC$$

$$AT = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$AT = \frac{1}{2} \sqrt{(12)^2 + (12)^2}$$

$$AT = \frac{1}{2} \sqrt{288}$$

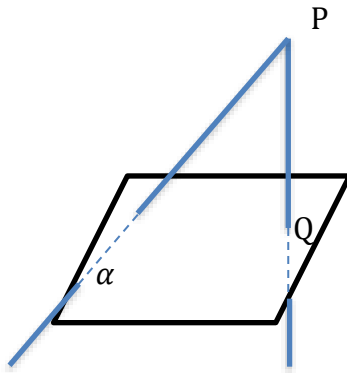
$$AT = \frac{1}{2} 12\sqrt{2}$$

$$AT = 6\sqrt{2}$$

Jadi jarak antara titik A ke Garis BD = $6\sqrt{2}$ cm

b. Jarak antara titik dengan bidang

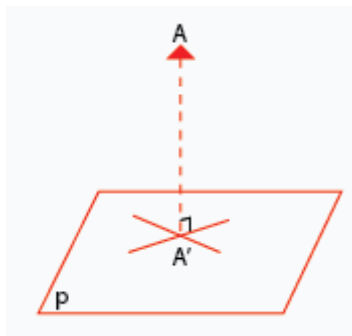
Pada titik P dan bidang α akan digunakan jarak antara titik P ke bidang α dengan $L \notin \alpha$. Melalui titik P akan dibuat tak hingga banyaknya garis yang memotong bidang α , salah satunya akan memotong secara tegak lurus di bidang α , garis PQ tegak lurus bidang α , garis PQ adalah jarak antara titik P ke bidang α , (Pendahuluan)



Gambar 2. 6 Proyeksi Titik Pada Bidang

Contoh:

Diketahui titik Q (3,4,5) dan bidang persamaan $3x + 2y - 2z + 6 = 0$. Hitunglah jarak titik Q ke bidang tersebut .



Gambar 2. 7 Ilustrasi Jarak Titik Pada Bidang

Penyelesaian:

- menentukan koordinat titik (x, y, z) : (3.4.5)
- menentukan normal vektor bidang (A, B, C) : Dari persamaan bidang $3x + 2y - 2z + 6 = 0$, diperoleh $A = 3, B = 2$, dan $C = -2$
- menentukan konstanta bidang (D) : dari persamaan bidang $3x + 2y - 2z + 6 = 0$ diperoleh $D = 6$
- substitusikan ke dalam persamaan

$$jarak = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

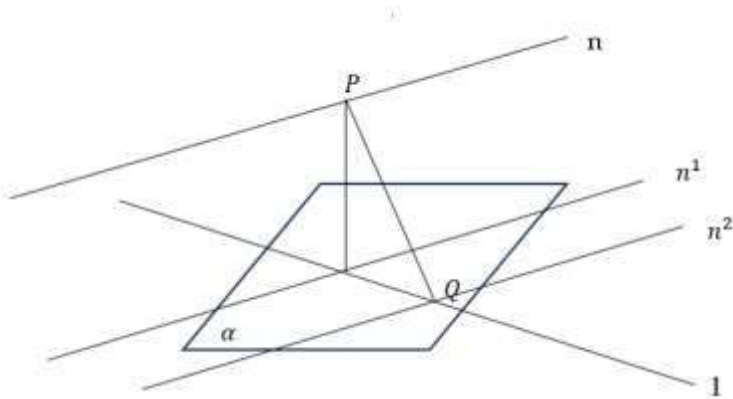
$$jarak = \frac{|3(3) + 2(4) + 2(5) + 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$jarak = \frac{|33|}{\sqrt{17}}$$

Jadi jarak antara titik Q pada bidang persamaan bidang $3x + 2y - 2z + 6 = 0 = \frac{33}{17}\sqrt{17}$.

c. Jarak Antara Garis Dengan Garis

Garis n dan garis l ditentukan garis n dan garis l . Bila n memotong l atau n berimpit dengan l maka jarak antara n dan l adalah nol.



Gambar 2. 8 Jarak Garis Dengan Garis

Diberikan garis n yang bersilangan dengan garis l dan dibuat tak hingga garis n^1 yang sejajar dengan garis n dan memotong dengan garis l . Kemudian bidang α yang dibentuk oleh garis – garis n^1 dan l . Garis n akan sejajar dengan bidang α . Proyeksikan n pada bidang α maka akan terbentuk garis n^1 pada bidang α sehingga akan berlaku bahwa n sejajar dengan n^1 dan sejajar dengan n^2 seperti pada gambar di atas. (Pendahuluan n.d.)

Contoh:

Diketahui garis g_1 dengan persamaan parametrik $\vec{r}_1(t) = (2 + 5t)\hat{i} + (3 + 4t)\hat{j} - (3 + 7t)\hat{k} = 0$ dengan parametrik waktu dan garis g_2 dengan persamaan parametrik $\vec{r}_2(s) = (6 + 2s)\hat{i} - (4 + 2s)\hat{j} - (2 + 5s)\hat{k} = 0$. Tentukan jarak antara kedua garis tersebut.

Penyelesaian

1. titik garis g_1

jika $t = 0$. titik pada garis pertama adalah $\vec{r}_1(0) = (2 + 5(0))\hat{i} + (3 + 4(0))\hat{j} - (3 + 7(0))\hat{k} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$

2. titik garis g_2

jika $s = 0$. titik pada garis pertama adalah $\vec{r}_2(0) = (6 + 2(0))\hat{i} - (4 + 2(0))\hat{j} - (2 + 5(0))\hat{k} = (6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$

3. hitung vektor yang menghubungkan dua titik tersebut

$$\vec{v} = \vec{r}_2(0) - \vec{r}_1(0) = (6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$\vec{v} = \vec{r}_2(0) - \vec{r}_1(0) = (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

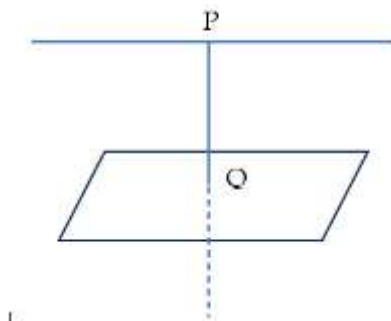
4. panjang vektor ini adalah jarak antara kedua garis.

Dengan menggunakan rumus panjang vektor $\vec{v} = \sqrt{4^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$

Jadi jarak antara kedua garis tersebut adalah $\sqrt{18}$ satuan

d. Jarak antara garis dan bidang.

Suatu garis n yang terletak pada bidang α atau memotong bidang α maka jarak yang terbentuk antara garis dan bidang tersebut adalah nol. Jika n sejajar dengan bidang α . maka proyeksi garis n pada bidang α merupakan suatu garis pada bidang α , yang disebut dengan n^1 . Jarak antara garis n dan garis n^1 merupakan jarak antara garis n tersebut dengan bidang



Gambar 2. 9 Jarak Garis Dengan Bidang

Contoh:

Diketahui garis L dengan persamaan vektor $r = (1, 2, 3) + t(2, 3, -1)$ dan bidang B dengan persamaan $Ax + By + Cz + D = 0$, di mana A, B, C, dan D adalah konstanta. Hitunglah jarak minimum antara garis L dan bidang B

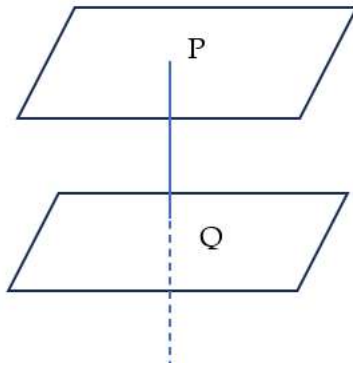
Penyelesaian:

- vektor arah garis L adalah $(2, 3, -1)$
- vektor normal bidang B adalah (A, B, C)
- vektor tegak lurus terhadap bidang B dapat diperoleh dari perkalian vektor normal dengan vektor konstanta sembarang (misal $(1, 0, 0)$)
- vektor tegak lurus = $(A, B, C) \times (1, 0, 0) = (-B, A, 0)$
- Substitusikan $t = 0$ ke persamaan vektor garis L:
- $r = (1, 2, 3) + 0(2, 3, -1)$
 $r = (1, 2, 3)$
- Titik pada garis L adalah $(1, 2, 3)$.
- Persamaan vektor garis tegak lurus:
 $r = (1, 2, 3) + s(-B, A, 0)$
- Substitusikan persamaan vektor garis L ke persamaan bidang B:
 $(1 + 2t)A + (2 + t)B + (3 - t)C + D = 0$
- Gunakan rumus jarak antara dua titik dalam ruang tiga dimensi

$$Jarak = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

e. Jarak Antara Bidang Dengan Bidang

perhatikan sebuah bidang α dan bidang β akan diukur jarak di antara keduanya adalah nol. Jika keduanya sejajar, dan ada titik P di bidang α serta titik Q di bidang β . Jarak antara keduanya dapat diwakili oleh PQ.



Gambar 2. 10 Jarak Bidang Dengan Bidang

Contoh:

Diketahui dua bidang B_1 dan B_2 dengan persamaan $3x + 2y - 2z + 6 = 0$ dan $2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Hitunglah jarak minimum antara kedua bidang tersebut.

Penyelesaian

- Vektor normal bidang $B_1 = (3, 2, -2)$
- Vektor normal bidang $B_2 = (2, 3, -4)$
- Misalkan $L_1 = (0 \ 0 \ 3)$, Subtitusikan ke persamaan $B_1 = (3(0) + 2(0) + (-2)(3) + 6) = 0$. Maka L_1 terletak pada B_1 .
- Persamaan vector garis tegak lurus $r = (0 \ 0 \ 3) + t * (2 \ 3 \ -4)$

- Subtitusikan persamaan vector garis lurus ke persamaan B_2
 $= r = (0 + 2t \ 0 + 3t \ 3 - 4t) = 0$

$$(2t + 3t + 3 - 4t) = 0$$

$$t = -3$$

Jadi titik potong $B_2 = (-6, -9, 12)$

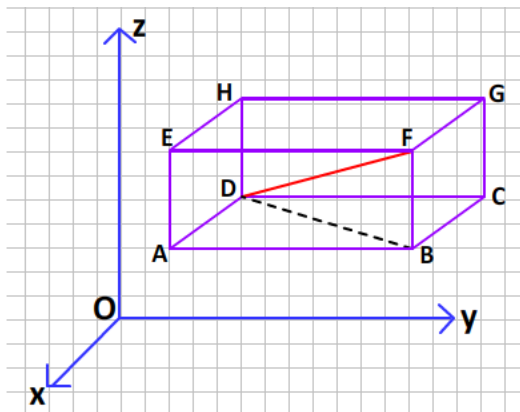
- Jarak minimum

$$\left| \frac{(B_1, B_2)}{B_2^2} \right| = \left| \frac{((3, 2, -2), (2, 3, -4))}{(2^2 + 3^2 + (-4)^2)} \right| = \left| \frac{(6 + 6 + 8)}{(29)} \right| = \frac{20}{29}$$

Jadi jarak minimum adalah $\frac{20}{29}$

2.3.2 Persamaan Jarak Antara Dua Titik Dalam Ruang

Jarak antara titik $D(x_1, y_1, z_1)$ dan $F(x_2, y_2, z_2)$ seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 2. 11 Jarak Antara Titik Dalam Ruang

Sumber : (Alapján- 2016)

Untuk menentukan jarak titik D ke F dapat menggunakan konsep Pythagoras.

$$\overline{AD} = |x_2 - x_1|$$

$$\overline{AB} = |y_2 - y_1|$$

Dengan menggunakan konsep pythagoras maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\overline{BD^2} &= \overline{AD^2} + \overline{AB^2} \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\end{aligned}$$

Pada konsep pythagoras dalam menentukan jarak titik D ke F sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\overline{DF^2} &= \overline{BD^2} + \overline{BF^2} \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\end{aligned}$$

Sehingga jarak titik D ke F

$$\overline{DF} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh:

Tentukan jarak antara titik A (2,4,1) dan titik B (4,1,5)

Penyelesaian:

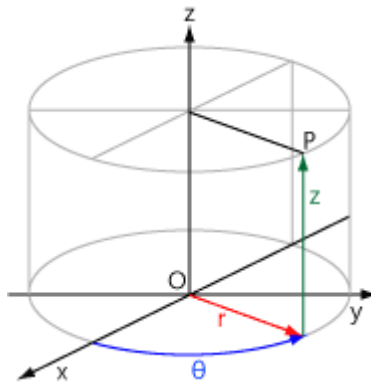
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(2 - 4)^2 + (4 - 1)^2 + (1 - 5)^2} \\ \overline{AB} &= \sqrt{29}\end{aligned}$$

Jadi jarak antara titik A dan B adalah $\sqrt{29}$ cm

2.4 Sistem Koordinat Silinder dan Sistem Koordinat Bola

2.4.1 Konsep Sistem Koordinat Silinder

Sistem koordinat tiga dimensi yang digunakan untuk menentukan posisi suatu titik ruang. Sistem koordinat polar bidang dengan penambahan ketinggian (sumbu z). (Dari et al. n.d.)



Gambar 2.12 Sistem Koordinat Silinder

Sumber : <https://id.wikipedia.org/>

Keterangan:

r (jarak radial) : jarak titik dari sumbu z

θ (sudut azimut) : sudut antara proyeksi titik pada bidang xy dan sumbu x positif.

z (ketinggian) : ketinggian titik di atas bidang xy

dengan persamaan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Contoh:

Carilah titik koordinat Plot titik dengan koordinat silinder $(3, \frac{\pi}{3}, 2)$

Penyelesaian:

Titik koordinat $(3, \frac{\pi}{3}, 2)$ dapat diselesaikan dengan cara

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$z = 2$$

Jadi titik koordinat adalah $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \sqrt{3}, 2)$

Contoh:

Tentukan persamaan dalam koordinat silinder untuk elipsoid $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 2$

Penyelesaian:

Karena $r^2 = x^2 + y^2$, maka diperoleh

$$3r^2 + 2z^2 = 2$$

Sehingga

$$2z^2 = 2 - 3r^2$$

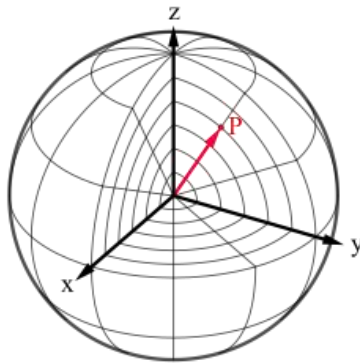
$$z^2 = \frac{(2 - 3r^2)}{2}$$

Jadi persamaaan dari elipsoid dalam koordinat silinder adalah

$$z^2 = \frac{(2 - 3r^2)}{2}$$

2.4.2 Konsep Sistem Koordinat Bola

Sistem Koordinat Bola adalah sebuah sistem koordinat yang digunakan dalam ruang tiga dimensi. Posisi suatu titik dalam sistem ini ditentukan oleh tiga nilai, yaitu jarak radial dari titik tersebut ke titik asal yang tetap, sudut kutub yang diukur dari arah puncak yang juga tetap, dan sudut azimuth yang diukur dari proyeksi ortogonal pada bidang referensi yang melalui titik asal serta ortogonal terhadap zenit, diukur dari arah referensi yang tetap dalam pesawat tersebut. Sistem ini dapat dianggap sebagai versi tiga dimensi dari sistem koordinat kutub. (Irsan Kasau and Aminah Dinayati Ghani 2018)



Gambar 2. 13 Sistem Koordinat Silinder

Sumber : <https://p2k.stekom.ac.id/>

Dengan persamaan:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Rumus jarak

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Dengan

ρ jarak dari titik asal ke P

θ sudut yang ada dalam koordinat silinder

Φ sudut antara sumbu-z positif dan ruas garis OP

Contoh:

Tentukan koordinat siku-siku dalam koordinat titik $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ dalam koordinat bola.

Penyelesaian

Dari persamaan koordinat bola diperoleh

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$= 1 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) 0 = 0$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$= \rho \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) (1) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$= 1 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Jadi titik koordinat siku-siku adalah $(0 \frac{1}{2}\sqrt{3} \frac{1}{2})$

Contoh:

Tentukan persamaan siku-siku untuk persamaan bolanya adalah $\rho = \sin \phi \sin \theta$

Penyelesaian:

Dari persamaan jarak titik koordinat bola diperoleh

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho = \sin \phi \sin \theta$$

atau

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

Yang merupakan persamaan dari sebuah persamaan bola dengan pusat $(0, \frac{1}{2}, 0)$ dan jari-jari $\frac{1}{2}$

DAFTAR PUSTAKA

- Alghadari, Fiki. 2017. "Menentukan Jarak Pada Ruang Dimensi Tiga Dengan Analisis Vektor." *Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya* (2): 85–94.
- Cartesius, Koordinat, and Ruang Dimensi Tiga. 2018. *Vektor Dalam*.
- Dari, Simulasi Pemodelan, Andrian Wijayono, Valentinus Galih, and Vidia Putra. "TWIST YANG DIPENGARUHI SOLENOID."
- Djohan. 2017. "The Correlation between Flexibility and Strength of Arm Muscle with Swimming Speed." *Media Kesehatan Masyarakat Indonesia* 13(4): 380.
- Fajriadi, Dede, Rudi Priyadi, and Diar Veni Rahayu. 2022. "Pengembangan Media Pembelajaran Geogebra Book Materi Dimensi Tiga." *Teorema: Teori dan Riset Matematika* 7(2): 453. doi:10.25157/teorema.v7i2.8813.
- Irsan Kasau, Matius, and ST Aminah Dinayati Ghani. 2018. "Analisis Kinematik Robot Koordinat Bola, Enam Derajat Kebebasan Dengan Metode Quaternion & Rotation Vector." *SISITI: Seminar Ilmiah Sistem Informasi dan Teknologi Informas* 7(2): 1–10.
- Mansyur, Abd Rahim. 2020. "Dampak COVID-19 Terhadap Dinamika Pembelajaran Di Indonesia." *Education and Learning Journal* Vol. 1, No: 113–23.
- Ndruru, Mesozisokhi. 2020. "Pengaruh Model Pembelajaran Problem Based Learning (PBL) Untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa Pada Materi Vektor Di Kelas X SMA Negeri 2 Lahusa." 15(2): 1–23.
- Ovinka, V T, and L Hartati. 2020. "Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Dimensi Tiga Kelas XII. Prosiding Seminar Nasional Dan Diskusi Panel Pendidikan Matematika Universitas Indraprasta PGRI." *Original Research* (80): 221–30.

- Santyasa, I Wayan. 2005. "Model Pembelajaran Inovatif Dalam Implementasi Kurikulum Berbasis Kompetensi." *Makalah disampaikan Dalam Penataran Guru-Guru SMP, SMA, dan SMK se Kabupaten Jembrana* Juni–Juli.
- Suryani, Mulia. 2017. "Buku Ajar Geometri Analitik." *Deepublish*: 211.
- Widyaningrum, Destriana, and Teady Matius Surya Mulyana. 2020. "Representasi Matrik Brightness Pola Gaussian Dengan Proyeksi Paralel Kaidah Tangan Kanan." *Jurnal Teknologi Informasi dan Terapan* 7(1): 39–45. doi:10.25047/jtit.v7i1.133.
- Yuniar Hakkun, Rizky, and Hariadi Mohamad. 2015. "Deformasi Obyek Tiga Dimensi Dengan Metode Laplacian." (April).

BAB 3

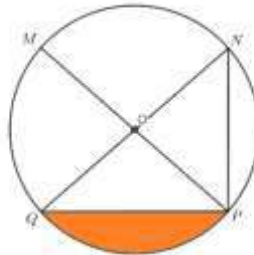
LINGKARAN

Oleh Nurul Fuady Adhalia H

3.1 Pendahuluan

Matematika membahas banyak hal, salah satunya tentang bentuk geometris. Salah satu bentuk geometri dasar yang penting untuk dipelajari adalah lingkaran. Konsep dasar lingkaran memiliki peranan penting dalam pengaplikasiannya, seperti pada bidang fisika, teknik, hingga sains data dan grafika komputer. Lingkaran adalah titik-titik dalam bidang berjarak sama terhadap titik pusat lingkaran. Jarak yang dimaksud dalam hal ini adalah jari-jari atau radius yang biasa dinotasikan sebagai r . (Schmidt and Ayres, 2010).

Semua jari-jari lingkaran bersifat kongruen dengan panjang diameternya setara dengan dua kali panjang jari-jarinya (Daniel C. Alexander and GERALYN M. Koeberlein, 2010). Gambar 3.1 berikut menunjukkan beberapa unsur lingkaran, yakni:



Gambar 3. 1 Unsur-unsur Lingkaran
(Sumber : GeoGebra)

- a. Titik pusat lingkaran pada titik O adalah titik yang berada tepat di bagian tengah lingkaran;
- b. Ruas garis OM menunjukkan jari-jari lingkaran. Jari-jari (r) adalah jarak titik pusat lingkaran terhadap tepi lingkaran;
- c. Ruas garis MP menunjukkan diameter lingkaran, yakni garis lurus yang membagi lingkaran menjadi dua bagian yang sama besar;
- d. Ruas garis PQ merupakan tali busur. Tali busur adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran;
- e. Garis lengkung MN dinamakan busur lingkaran, yakni garis berupa lengkungan lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lingkaran;
- f. Daerah MOQ merupakan salah satu contoh dari juring lingkaran. Juring adalah daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari lingkaran yang mengapit suatu busur; dan
- g. Daerah PQ yang diarsir krem disebut tembereng. Tembereng adalah daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran.

Latihan 1:

Perhatikan Gambar 3.1 di atas. Sebutkan bagian unsur lingkaran berikut selain yang telah disebutkan sebelumnya:

- a. jari-jari (r) dan diameter lingkaran (d);
- b. tali busur;
- c. busur;
- d. juring; dan
- e. tembereng

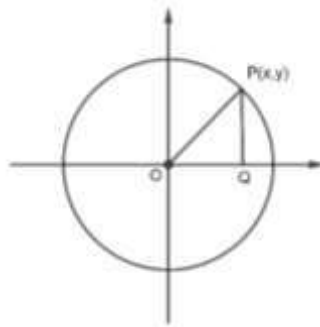
3.2 Persamaan Lingkaran

Pernahkah kamu mendengar istilah satelit? Satelit adalah benda langit yang mengelilingi benda langit lainnya berdasarkan orbit tertentu (Nasution, 2010). Pemahaman akan posisi satelit menjadi hal yang sangat penting bagi beberapa kalangan, seperti: individu, organisasi, maupun pemerintah. Beberapa contoh pemanfaatan posisi satelit, diantaranya: aplikasi Google Maps yang bersandar pada posisi satelit dalam menentukan lokasi dan memberikan petunjuk arah serta aplikasi ojek daring yang memberikan pedoman pada pengemudi untuk melacak lokasi pelanggannya.

Bulan adalah satelit yang mengitari Bumi pada lintasan yang berbentuk elips. Ketika eksentrisitas elips kecil, persamaan lingkaran dapat digunakan untuk membantu dan memprediksi pergerakan satelit.

3.2.1 Persamaan Lingkaran dengan Titik Pusat $O(0,0)$

Amati Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3. 2 Lingkaran L dengan Titik Pusat O

(Sumber : GeoGebra)

Lingkaran L merupakan lingkaran yang berpusat di titik $O(0, 0)$ dengan sebarang titik $P(x, y)$. Jika titik P diproyeksikan ke sumbu- x maka membentuk segitiga siku-siku OPQ yang berlaku teorema Pythagoras:

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

Jika $x = OQ$ dan $y = PQ$ maka persamaan di atas dapat dinyatakan ke bentuk:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Secara umum, untuk sebarang titik $P(x, y)$ pada lingkaran dengan $O(0, 0)$ adalah titik pusat dan jari-jari r maka persamaan lingkarannya adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Contoh:

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan titik pusat pada $O(0, 0)$ dan berjari-jari 6!
2. Berapakah jari-jari lingkaran yang memiliki persamaan:

$$x^2 + y^2 = 20$$

Jawab:

1. Lingkaran dengan titik pusat pada $O(0, 0)$ dan berjari-jari 6 dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

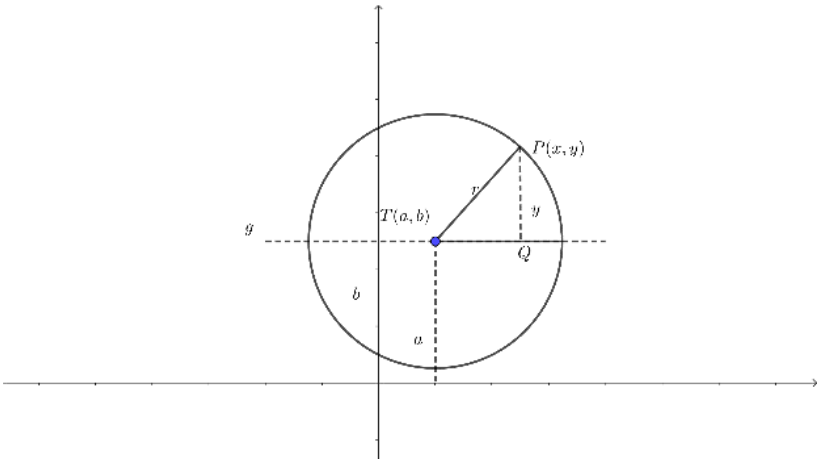
$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

2. Persamaan $x^2 + y^2 = 20$ menunjukkan bahwa $r^2 = 20$ sehingga diperoleh $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3.2.2 Persamaan Lingkaran dengan Titik Pusat $T(a, b)$

Gambar 3.3 berikut merupakan ilustrasi lingkaran L dengan titik pusat $T(a, b)$ dan berjari-jari r yang melalui sebarang titik $P(x, y)$.



Gambar 3. 3 Lingkaran L Berpusat di $T(a,b)$

(Sumber : GeoGebra)

Garis g adalah garis yang sejajar sumbu- x dan melalui titik pusat T . Jika titik P diproyeksikan terhadap garis g maka akan membentuk segitiga siku-siku TPQ . Teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga TPQ di atas dapat dituliskan sebagai:

$$TP^2 = TQ^2 + PQ^2$$

Berdasarkan Gambar 3.3 di atas, terlihat bahwa $TP = r$, $TQ = (x - a)$, dan $PQ = (y - b)$ sehingga diperoleh:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Secara umum, untuk sebarang titik $P(x, y)$ pada lingkaran yang berpusat di titik $T(a, b)$ berjari-jari r maka persamaan lingkarannya adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Persamaan tersebut di atas dikenal sebagai *persamaan baku lingkaran* (Halidin, 2022).

Contoh:

1. Tentukan persamaan baku lingkaran dengan titik pusat $T(-4 -6)$ dan $r = 6$!
2. Tentukan persamaan baku lingkaran dengan titik pusat $T(6 -8)$ yang menyinggung garis $8x - 6y = 46$!
3. Sebuah satelit sedang mengitari Bumi yang membentuk persamaan:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 7^2$$

Jika satelit bergerak dengan kecepatan sudut $0,6$ rad/jam pada saat $t = 2$ jam maka tentukan posisi satelit tersebut!

Jawab:

1. Persamaan baku lingkaran dengan $T(-4 -6)$ dan $r = 6$ adalah:

$$\begin{aligned}(x - (-4))^2 + (y - (-6))^2 &= 6^2 \\ \Rightarrow (x + 4)^2 + (y + 6)^2 &= 36\end{aligned}$$

2. Jarak titik $T(6 -8)$ terhadap garis singgung $8x - 6y - 46 = 0$ merupakan jari-jari lingkaran sehingga dapat diperoleh dengan:

$$r = \frac{8x - 6y - 46}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{8(6) - 6(-8) - 46}{\sqrt{100}} = 5$$

Jadi, persamaan baku lingkaran dengan titik pusat di $T(6 -8)$ yang menyinggung garis $8x - 6y = 46$ adalah:

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 25$$

3. Jika diketahui besar kecepatan sudut (ω) = 0,6 rad/jam maka besar sudut (θ) yang ditempuh satelit pada saat $t = 2$ jam sebesar:

$$\theta = \omega t = 0,6 \times 2 = 1,2 \text{ rad}$$

Koordinat satelit pada saat $t = 2$ jam adalah:

$$x = a + r \cos \theta = 5 + 7 \cos(1,2) = 7,54$$

$$y = b + r \sin \theta = 6 + 7 \sin(1,2) = 8,54$$

Jadi, posisi satelit pada saat $t = 2$ jam adalah (7,54 8,54)

3.2.3 Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Perhatikan kembali persamaan baku lingkaran yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Jika persamaan baku lingkaran tersebut diuraikan maka diperoleh:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Misalkan $P = -2a$, $Q = -2b$, dan $R = a^2 + b^2 - r^2$ dengan $P, Q, R \in \mathbb{R}$ maka persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$$

Persamaan $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ dikenal sebagai Bentuk Umum Persamaan Lingkaran (Lumbantoruan, 2019). Bentuk umum Persamaan Lingkaran di atas dapat dituliskan dalam bentuk kuadrat sempurna, yaitu:

$$(x^2 + Px) + (y^2 + Qy) = -R$$

$$\left(x^2 + Px + \left(\frac{1}{2}P\right)^2\right) + \left(y^2 + Qy + \left(\frac{1}{2}Q\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + \left(\frac{1}{2}Q\right)^2 - R$$

$$\left(x + \frac{1}{2}P\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}Q\right)^2 = \frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{4}Q^2 - R$$

Hasil dari kuadrat sempurna di atas diperoleh bahwa pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q\right)$ serta jari-jari lingkarannya adalah:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{4}Q^2 - R}$$

Contoh:

Tentukan letak titik pusat dan r dari persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 10y = 7$!

Jawab :

Berdasarkan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 7$ diketahui bahwa nilai $P = -4$, $Q = 10$, dan $R = -7$.

a. Pusat lingkaran

$$\left(-\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q\right) = \left(-\frac{1}{2}(-4) - \frac{1}{2}(10)\right) = (2 - 5)$$

Jadi, pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 7$ adalah $(2 - 5)$.

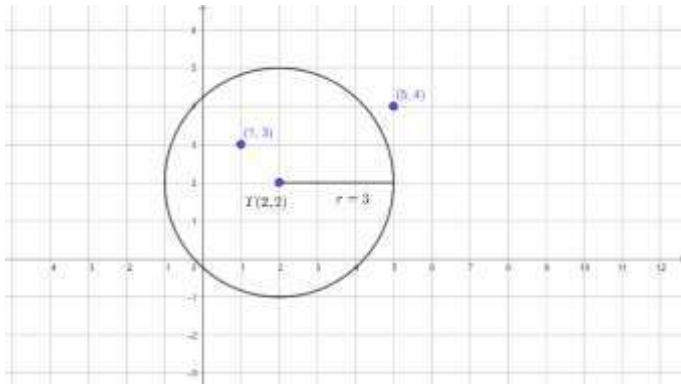
b. Jari-jari lingkaran

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{4}Q^2 - R} = \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(10)^2 - (-7)} = 6$$

Jadi, jari-jari lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 10y = 7$ adalah 6.

3.3 Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Perhatikan Gambar 3.4 berikut:



Gambar 3. 4 Lingkaran L Berpusat di $T(2, 2)$ Berjari-jari 3

(Sumber : GeoGebra)

Gambar 3.4 di atas mendeskripsikan bentuk geometrik dari persamaan lingkaran $L: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Terlihat pada Gambar 3.4 bahwa kedudukan titik $(5, 4)$ berada di luar lingkaran sementara titik $(1, 3)$ berada di dalam lingkaran. Hal ini menandakan bahwa sejatinya dapat diketahui kedudukan suatu titik terhadap lingkaran. Kedudukan sebarang titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran dengan titik pusat di $T(a, b)$ dan jari-jari r dapat ditentukan dengan menemukan jarak titik P terhadap titik pusat lingkaran. Lebih rinci dijabarkan sebagai berikut:

1. Titik $P(x_1, y_1)$ berada di luar lingkaran jika $|PT| > r$. Secara matematis, dapat dituliskan:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$$

atau,

$$x_1^2 + y_1^2 + Px_1 + Qy_1 + R > 0$$

2. Titik $P(x_1, y_1)$ berada pada lingkaran jika $|PT| = r$. Secara matematis, dapat dituliskan:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

atau,

$$x_1^2 + y_1^2 + Px_1 + Qy_1 + R = 0$$

3. Titik $P(x_1, y_1)$ berada di dalam lingkaran jika $|PT| < r$. Secara matematis, dapat dituliskan:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$$

atau,

$$x_1^2 + y_1^2 + Px_1 + Qy_1 + R < 0$$

Contoh:

Tentukan kedudukan titik $A(5\ 5)$, $B(-6\ 10)$, dan $C(4\ 6)$ pada lingkaran $L: x^2 + y^2 + 8x - 12y = 12$!

Jawab:

Persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 + 8x - 12y = 12$ dapat diubah ke bentuk baku persamaan lingkaran, yakni: $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 64$.

- Titik $A(5\ 5)$ terletak di luar lingkaran karena $(5 + 4)^2 + (5 - 6)^2 = 82 > 64$;
- Titik $B(-6\ 10)$ terletak di dalam lingkaran karena $(-6 + 4)^2 + (10 - 6)^2 = 20 < 64$; dan

- c. Titik $C(4, 6)$ berada tepat pada lingkaran karena $(4 + 4)^2 + (6 - 6)^2 = 64$.

3.4 Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Diberikan sebarang garis $h: kx + n$ dan lingkaran $L: x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$. Jika persamaan garis h disubstitusi ke persamaan lingkaran L menghasilkan persamaan berikut:

$$x^2 + (kx + n)^2 + Px + Q(kx + n) + R = 0$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2knx + n^2 + Px + Qkx + Qn + R = 0$$

$$(1 + k^2)x^2 + (2kn + P + Qk)x + n^2 + Qn + R = 0$$

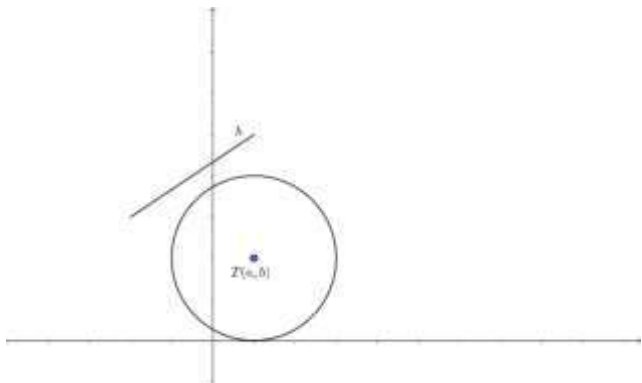
Terlihat bahwa persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat yang nilai diskriminannya dapat dihitung dengan:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (2kn + P + Qk)^2 - 4(1 + k^2)(n^2 + Qn + R)$$

Berdasarkan nilai diskriminan yang diperoleh, dapat ditentukan kedudukan garis h terhadap lingkaran L , yakni:

- a. Jika nilai $D < 0$ maka garis $h: kx + n$ tidak memotong atau menyinggung lingkaran $L: x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$. Secara geometrik, kondisi ini diilustrasikan pada Gambar 3.5 berikut:

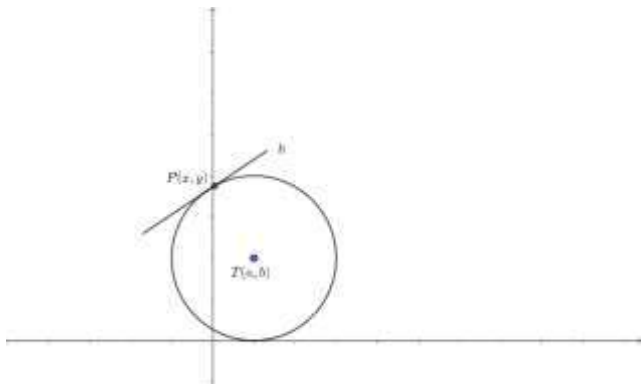


Gambar 3. 5 Garis h Tidak Memotong/Menyinggung Lingkaran L

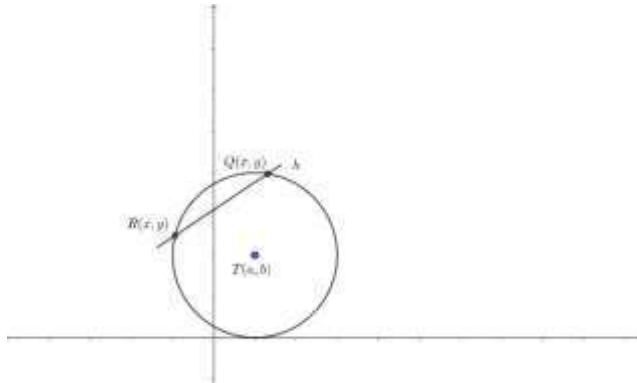
(Sumber : GeoGebra)

- b. Jika nilai $D = 0$ maka garis $h: kx + n$ memotong atau menyinggung lingkaran $L: x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ di satu titik.
- c. Jika nilai $D > 0$ maka garis $h: kx + n$ memotong atau menyinggung lingkaran $L: x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ di dua titik berlainan.

Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 secara berturut-turut menunjukkan bentuk geometrik garis h terhadap lingkaran L sesuai kondisi pada poin b dan c di atas.



Gambar 3. 6 Garis h Memotong/Menyinggung Lingkaran L
(Sumber : GeoGebra)



Gambar 3. 7 Garis h Memotong Lingkaran L di Dua Titik Berlainan

(Sumber : GeoGebra)

Contoh:

Bagaimanakah posisi atau kedudukan garis $h: x + 5$ terhadap $L: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1$?

Jawab:

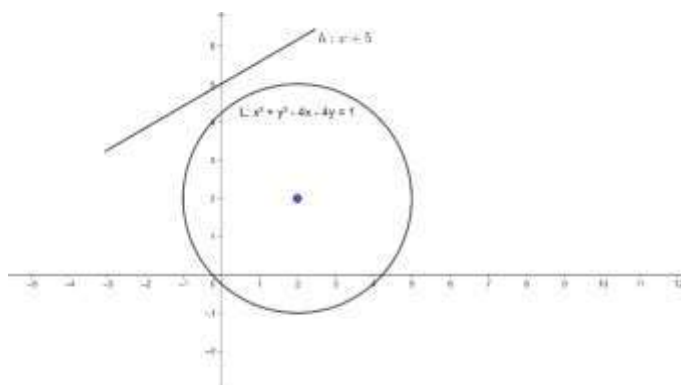
Substitusi persamaan $h: x + 5$ ke persamaan lingkaran, diperoleh:

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 5)^2 - 4x - 4(x + 5) &= 1 \\ x^2 + x^2 + 10x + 25 - 4x - 4x - 20 - 1 &= 0 \\ 2x^2 + 2x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan di atas didapatkan nilai $a = 2$, $b = 2$, dan $c = 4$ sehingga nilai diskriminannya adalah:

$$D = 2^2 - 4(2)(4) = -28$$

Karena nilai $D < 0$, maka garis $h: x + 5$ tidak memotong atau menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 4y =$. Secara geometrik, kedudukan garis h terhadap lingkaran disajikan sesuai Gambar 3.8 berikut:



Gambar 3. 8 Garis h Tidak Berpotongan dengan Lingkaran L

(Sumber : GeoGebra)

Latihan Soal:

1. Diberikan lingkaran dengan titik pusat di $(1, -7)$ dan berjari-jari $8\sqrt{3}$. Tentukan:
 - a. persamaan baku lingkaran;
 - b. bentuk umum persamaan lingkaran; dan
 - c. gambarkan secara geometrik lingkaran tersebut!
2. Bagaimanakah kedudukan titik $G(1, -1)$, $E(5, -2)$, dan $F(6, -6)$ terhadap lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$?
3. Tentukan kedudukan garis $h: 1 - \frac{1}{5}x$ terhadap lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$! Gambarkan secara geometrik kedudukan garis h terhadap lingkaran L tersebut!

DAFTAR PUSTAKA

- Daniel C. Alexander and Geralyn M. Koeberlein (2010) *Elementary Geometry for College Students*. 5th Ed. Canada: Cengage Learning.
- Halidin (2022) *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. Purbalingga: Eureka Media Aksara.
- Lumbantoruan, J. H. (2019) 'Modul Lingkaran', in Program Studi Matematika FKIP.
- Nasution, H. (2010) 'Orbit Satelit Dan Ketinggiannya', *Berita Dirgantara*, 2(1). Available at: www.ee.surrey.ac.uk.
- Schmidt, P. and Ayres, F. (2010) *Schaum's Outline of College Mathematics*. Fourth Edition. New York City: McGraw Hill LLC.

BAB 4

TRANSFORMASI

Oleh Hartina Husain

4.1 Pendahuluan

Geometri, fondasi matematika yang memperelajari bentuk dan ruang, selalu menjadi daya tarik tersendiri bagi manusia. Salah satu contohnya melalui piramida kuno Mesir sampai dengan gedung pencakar langit modern ini membutuhkan pemahaman geometri yang luar biasa dalam membangun struktur bangunannya. Di antara konsep yang ada pada geometri, transformasi geometri berperan dalam memahami maupun memanipulasi bentuk.

Transformasi geometri memiliki aplikasi yang luas di berbagai bidang, mulai dari matematika dan sains hingga teknik, seni, dan desain. Dalam matematika, transformasi digunakan untuk membuktikan teorema, membangun bukti, dan menyelesaikan masalah geometri yang kompleks. Dalam sains, transformasi digunakan untuk memahami dan memodelkan fenomena alam, seperti pergerakan planet dan rotasi molekul. Dalam teknik, transformasi digunakan untuk merancang struktur yang kuat dan efisien, seperti jembatan dan bangunan. Sementara itu dalam seni dan desain, transformasi digunakan untuk menciptakan pola, gambar, dan pahatan yang indah.

Bab ini membahas mengenai empat operasi fundamental dalam transformasi geometri yaitu translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi.

4.2 Translasi

Translasi (pergeseran) adalah perpindahan suatu objek dari satu tempat ke tempat lainnya tanpa mengubah bentuk atau orientasi objek tersebut. Dalam translasi, semua titik pada objek bergerak sejajar dengan arah yang sama dan sejauh jarak yang sama. Dengan kata lain, setiap titik pada objek digeser dengan vektor tertentu yang sama. Misalnya, jika Anda memiliki sebuah objek seperti segitiga, translasi akan menggeser seluruh segitiga tersebut ke arah tertentu tanpa memutar atau mengubah ukuran segitiga. Hal ini mirip seperti menggeser sebuah kertas dari satu titik ke titik lainnya di atas meja tanpa memiringkan atau melipatnya.

Misalkan terdapat titik $P(x, y)$ ditranslasikan oleh $T(a, b)$ akan menghasilkan bayangan $P'(x', y')$ yang dapat ditulis menjadi

$$P(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x', y') = P'(x + a, y + b)$$

Dengan demikian bayangan dari titik P menghasilkan:

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

Contoh:

1. Sebuah titik $P(-2, 13)$ dilakukan translasi sebesar $T(1, 5)$ menghasilkan bayangan titik P pada titik....

Pembahasan:

Dari soal diperoleh titik koordinat $P(-2,13)$ yang berarti $x = -2$ dan $y = 13$ dilakukan translasi sebesar $T(1,5)$ dimana $a = 1$ dan $b = 5$ sehingga dapat dituliskan bahwa:

$$x' = x + a = -2 + 1 = -1$$

$$y' = y + b = 13 + 5 = 18$$

Sehingga diperoleh bayangan titik P yaitu $P'(-1,18)$

Contoh:

2. Tentukan bayangan dari persamaan garis $2x - y = 6$ yang ditranslasikan oleh $T(2,7)$!

Pembahasan:

Pada soal diketahui bahwa persamaan garis $2x - y = 6$ akan ditranslasikan oleh $T(12,7)$ yang berarti $a = 12$ dan $b = 7$. Misalkan titik $P(x, y)$ memenuhi persamaan $2x - y = 6$ sehingga dapat dituliskan:

$$x' = x + 12$$

$$y' = y + 7$$

Berdasarkan kedua persamaan tersebut diperoleh :

$$x' = x + 12 \rightarrow x = x' - 12$$

$$y' = y + 7 \rightarrow y = y' - 7$$

Kemudian persamaan $x = x' - 12$ dan $y = y' - 7$ disubstitusikan ke persamaan $2x - y = 6$

$$2(x' - 12) - (y' - 7) = 6$$

$$2x' - 24 - y' + 7 = 6$$

$$2x' - y' = 6 + 17$$

$$2x' - y' = 23$$
$$\therefore 2x - y = 8$$

Contoh:

3. Diketahui koordinat titik $A(5, -4)$ ditranslasikan oleh $T(3, 10)$ sehingga menghasilkan bayangan $A'(3a, 6)$. Tentukanlah nilai a ...

Pembahasan:

Dari soal pada contoh 3 dapat dituliskan :

$$A(5, -4) \xrightarrow{T\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)} A'(3a, 6)$$

Sehingga diperoleh

$$3a = 5 + 3$$

$$3a = 8$$

$$a = \frac{8}{3}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai $a = \frac{8}{3}$,

4.3 Refleksi

Refleksi (pencerminan) dapat didefinisikan sebagai transformasi geometri yang mengubah posisi suatu titik atau objek dalam ruang dengan memantulkannya melalui suatu titik, garis, atau bidang. Konsep ini sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari, seperti saat kita melihat bayangan di cermin (Febriana et al., 2016). Dalam refleksi, setiap titik pada objek asli dipantulkan melewati titik, garis, atau bidang, tetapi jarak antara setiap titik dan referensi tersebut tetap sama setelah refleksi. Melalui pemahaman konsep transformasi geometri

refleksi, kita dapat mengenali pola simetri dalam objek dan memanfaatkannya dalam berbagai aplikasi praktis.

Terdapat beberapa jenis-jenis Refleksi yaitu :

1. Refleksi terhadap sumbu $-x$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_x} P'(x, -y)$$

2. Refleksi terhadap sumbu $-y$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_y} P'(-x, y)$$

3. Refleksi terhadap titik asal $O(0,0)$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} P'(-x, -y)$$

4. Refleksi terhadap garis $y = x$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} P'(y, x)$$

5. Refleksi terhadap garis $y = -x$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{y=-x}} P'(-y, -x)$$

6. Refleksi terhadap garis $x = h$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{x=h}} P'(2h - x, y)$$

7. Refleksi terhadap garis $y = k$

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{y=k}} P'(x, 2k - y)$$

Dari jenis refleksi tersebut, dapat juga dituliskan dalam persamaan matriks transformasi seperti pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4. 1 Persamaan Matriks Refleksi

Refleksi	Persamaan Matriks Transformasi
Sumbu x	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Sumbu y	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Titik asal $O (0,0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = x$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $x = h$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$
Garis $y = k$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$

Contoh:

Diberikan suatu segitiga ABC dengan masing-masing koordinat titik-titiknya yaitu A(2,3), B(5,6) dan C(7,4). Tentukan bayangan koordinat titik-titik segitiga tersebut jika direfleksikan terhadap garis $y = x$.

Pembahasan:

Refleksi suatu titik terhadap garis $y = x$ dilakukan dengan mengubah koordinat x menjadi y , begitupun sebaliknya. Dapat pula dituliskan seperti berikut ini :

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} P'(y, x)$$

Sehingga diperoleh bayangan segitiga ABC yang baru yaitu $A'(3,2)$, $B'(6,5)$, dan $C'(4,7)$.

Contoh:

Tentukan bayangan dari persamaan garis $y = -2x + 3$ yang dilakukan refleksi pada sumbu $x = 4$.

Pembahasan:

Dalam menyelesaikan soal ini, juga dapat menggunakan persamaan matriks transformasi refleksi sumbu $x = h$ dengan h bernilai 4.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$x' = -x + 4 \rightarrow x = -x' + 4$$

$$y' = y \rightarrow y = y'$$

Dengan demikian, dengan melakukan substitusi nilai x dan y diperoleh

$$y' = -2(-x' + 4) + 3$$

$$y' = 2x' - 8 + 3$$

$$y' = 2x' - 5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

Contoh:

Parabola $y = x^2 - 3x + 2$ direfleksikan terhadap titik asal $O(0,0)$. Tentukan persamaan bayangan parabola.

Pembahasan:

Misalkan titik $P(x, y)$ memenuhi persamaan $y = x^2 - 3x + 2$ sehingga

$$P(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} P'(-x, -y)$$

Sehingga dapat dituliskan

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

Kemudian disubstitusikan pada persamaan $y = x^2 - 3x + 2$ menjadi

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$-y' = (-x')^2 - 3(-x') + 2$$

$$-y' = (x')^2 + 3x' + 2$$

$$y' = (x')^2 - 3x' - 2$$

$$\therefore y = x^2 - 3x - 2$$

4.4 Rotasi

Rotasi merupakan suatu proses transformasi di mana suatu objek atau titik diputar dengan sudut putaran tertentu terhadap suatu pusat rotasi yang ditentukan. Adapun rotasi ini hanya

mengubah posisi, bentuk, dan orientasi objek tanpa mengubah ukuran relatifnya. Setiap titik pada objek bergerak sepanjang lingkaran dengan jari-jari yang sama saat objek berputar. Rotasi dapat dilakukan dalam berbagai sudut, baik positif maupun negatif, sesuai dengan arah putaran yang diinginkan (Fitriana, 2022).

Secara matematis, rotasi diwakili oleh sudut putar di mana setiap titik objek koordinatnya diubah sesuai dengan rumus rotasi. Penggunaan rotasi ini dapat diaplikasikan pada pemodelan objek dalam grafika komputer, analisis struktur dalam rekayasa, pergerakan benda dalam fisika, dan dalam banyak aplikasi lainnya yang melibatkan perubahan orientasi objek dalam ruang.

Sudut rotasi atau α merupakan sudut yang berada diantara garis titik asal dan pusat rotasi yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi. Jika rotasi diputar searah dengan jarum jam maka besar sudut rotasi negatif ($-\alpha$). Namun, jika rotasi diputar berlawanan dengan jarum jam maka besar sudut rotasi positif (α). Rotasi dapat disimbolkan dengan $R(S, \alpha)$ dimana S menunjukkan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

Terdapat beberapa rotasi yaitu sebagai berikut:

1. Rotasi terhadap titik pusat $(0,0)$

$$P(x, y) \xrightarrow{R_{[O(0,0), \alpha]}} P'(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

2. Rotasi terhadap titik pusat (a, b)

$$P(x, y) \xrightarrow{R_{[(a,b), \alpha]}} P'((x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha, (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha)$$

Pada kedua rotasi tersebut, dapat juga dituliskan dalam persamaan matriks transformasi seperti pada Tabel 4.2 berikut

Tabel 4. 2 Persamaan Matriks Rotasi

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
(0.0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a. b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} +$

Contoh:

Tentukan bayangan titik $P(-2.10)$ jika dilakukan rotasi yang berlawanan arah jarum jam sebesar 90° dengan pusat $O(0.0)$!

Pembahasan:

Koordinat titik $P(-2.10)$ akan dirotasikan $R_{[O(0.0).90^\circ]}$ dengan arah rotasi berlawanan arah jarum jam sehingga besar sudut rotasi bernilai positif.

$$P(x,y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90^\circ]}} P'(xcos\ 90^\circ - y\ sin90^\circ, x\ sin90^\circ + y\ cos90^\circ)$$

Pada titik koordinat $P(-2.10)$ yaitu nilai $x = -2$ dan $y = 10$, Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x' &= -2 \cos 90^\circ - 10 \sin 90^\circ \\ &= -2(0) - 10(1) = -10 \\ y' &= 2 \sin 90^\circ + 10 \cos 90^\circ \\ &= -2(1) - 10(0) = -2 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh koordinar bayangannya yaitu $P'(-2.-10)$

Contoh:

Suatu persamaan garis $3x - y + 8 = 0$ dilakukan rotasi searah dengan jarum jam dengan pusat $(1,2)$ sebesar 180° . Tentukan persamaan bayangannya.

Pembahasan:

Misalkan titik $P(x, y)$ dirotasikan $R_{[(1,2), -180^\circ]}$ dimana arah rotasi searah jarum jam sehingga besar sudut rotasi bernilai negatif.

$$P(x, y) \xrightarrow{R_{[(1,2), -180^\circ]}} P'((x - 1) \cos(-180^\circ) - (y - 2) \sin(-180^\circ), (x - 1) \sin(-180^\circ) + (y - 2) \cos(-180^\circ))$$

Dengan demikian diperoleh:

$$x' = (x - 1) \cos(-180^\circ) - (y - 2) \sin(-180^\circ)$$

$$= (x - 1) \cos(180^\circ) + (y - 2) \sin(180^\circ)$$

$$= (x - 1)(-1) + (y - 2)(0)$$

$$x' = -x + 1$$

$$\therefore x = -x' + 1$$

$$y' = (x - 1) \sin(-180^\circ) + (y - 2) \cos(-180^\circ)$$

$$= -(x - 1) \sin(180^\circ) + (y - 2) \cos(180^\circ)$$

$$= -(x - 1)(0) + (y - 2)(-1)$$

$$y' = -y + 2$$

$$\therefore y = -y' + 2$$

Kemudian nilai $x = -x' + 1$ dan $y = -y' + 2$ disubstitusi ke persamaan $3x - y + 8 = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 3(-x' + 1) - (-y' + 2) + 8 &= 0 \\ -3x' + 3 + y' - 2 + 8 &= 0 \\ -3x' + y' + 9 &= 0 \\ \therefore -3x + y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Perlu diingat ! $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
--

4.5 Dilatasi

Dilatasi adalah transformasi geometri yang mengubah ukuran suatu objek atau titik dalam ruang dengan mengalikan atau membagi panjang setiap dimensinya dengan faktor skala yang konstan. Dalam dilatasi, bentuk dan orientasi objek tetap dipertahankan, tetapi ukurannya diperbesar atau diperkecil sesuai dengan faktor skala yang ditentukan (Sugiarto, 2016).

Suatu titik $P(x,y)$ yang dilakukan transformasi dilatasi dengan faktor skala k dengan pusat $O(0,0)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P(x,y) \xrightarrow{D_{[k,O(0,0)]}} P'(kx,ky)$$

Sementara itu dilatasi dengan faktor skala k dengan pusat (a,b) dapat dituliskan menjadi:

$$P(x,y) \xrightarrow{D_{[k,(a,b)]}} P'(a + k(x - a), b + k(y - b))$$

Bentuk dilatasi tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan matriks seperti pada Tabel 4.3 berikut :

Tabel 4. 3 Persamaan Matriks Dilatasi

Titik Pusat	Persamaan Transformasi Matriks
$(0,0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Contoh:

Tentukan bayangan koordinat titik $P(-3,6)$ setelah dilakukan dilatasi terhadap pusat $O(0,0)$ dengan skala 5!

Pembahasan:

Koordinat titik $P(-3,6)$ akan didilatasikan oleh $D_{[5, O(0,0)]}$ yaitu

$$P(x, y) \xrightarrow{D_{[5, O(0,0)]}} P'(5x, 5y)$$

Diperoleh bayangan koordinatnya

$$x' = 5x = 5(-3) = -15$$

$$y' = 5y = 5(6) = 30$$

Dengan demikian diperoleh $P'(-15,30)$

Contoh:

Suatu garis $h : 4x - y = 6$ dilakukan dilatasi dengan faktor skala $\frac{1}{2}$ terhadap titik pusat $(-6,2)$. Tentukan persamaan garis h setelah dilatasi.

Pembahasan:

Misalkan suatu titik $P(x, y)$ akan dilatasi oleh $D_{[\frac{1}{2}, (-4, 2)]}$ yaitu

$$P(x, y) \xrightarrow{D_{[\frac{1}{2}, (-4, 2)]}} P' \left(-6 + \frac{1}{2}(x - (-6)), 2 + \frac{1}{2}(y - 2) \right)$$

Diperoleh bayangan koordinat titik $P'(x', y')$

$$x' = -6 + \frac{1}{2}(x - (-6))$$

$$x' = -6 + \frac{x}{2} + 3$$

$$x' = \frac{x - 6}{2}$$

$$\therefore x = 2x' + 6$$

$$y' = 2 + \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$y' = 2 + \frac{y}{2} - 1$$

$$y' = \frac{y - 2}{2}$$

$$\therefore y = 2y' + 2$$

Dengan demikian, bayangan garis h dituliskan menjadi

$$4x - y = 6$$

$$4(2x' + 6) - (2y' + 2) = 6$$

$$8x' + 16 - 2y' - 2 = 6$$

$$8x' - 2y' = -8$$

$$\therefore 8x - 2y = -8$$

DAFTAR PUSTAKA

- Febriana, R., Haryono, Y., & Yusri, R. (2016). *Modul Geometri Transformasi* (Issue July).
- Fitriana, H. A. (2022). *Transformasi geometri berbasis aplikasi geogebra matematika umum kelas XI*. 1–76.
- Sugiarto. (2016). *Bahan Ajar : Transformasi Geometri*. 4(1), 1–23.

BAB 5

VEKTOR

Oleh Yessy Yusnita

5.1 Pendahuluan

Bagian ini memberikan penjelasan tentang deskripsi bab mengenai vektor, tujuan pembelajaran vektor, dan kompetensi khusus yang diharapkan dari vektor ini.

5.1.1 Deskripsi Bab

Deskripsi vektor diberikan di bagian ini. Secara umum, materi bab ini terdiri dari tiga bagian utama : pendahuluan, penyajian, dan penutup. Untuk pendahuluan terdiri dari deskripsi bab, tujuan pembelajaran, kompetensi khusus yang diharapkan dari vektor ini. Penyajian meliputi pengertian vektor, notasi vektor, sifat-sifat vektor, operasi hitung vektor pada bidang datar R^2 , operasi hitung vektor pada bidang ruang R^3 dan proyeksi vektor. Untuk penutup daftar pustaka.

5.1.2 Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu :

1. Menggunakan konsep vektor dalam pemecahan masalah.
2. Menggunakan sifat-sifat dan operasi aljabar vektor dalam pemecahan masalah.

- 3. Menggunakan sifat-sifat dan operasi perkalian skalar dua vektor dalam pemecahan masalah.
- 4. Menggunakan konsep proyeksi vektor dalam pemecahan masalah.

5.1.3 Kompetensi Khusus

Mahasiswa mempunyai kemampuan untuk memahami vektor dan notasinya, sifat-sifat vektor, vektor pada bidang datar R^2 , vektor pada bidang ruang R^3 dan proyeksi vektor.

5.2 Penyajian

Bagian ini membahas tentang pengertian vektor, notasi vektor, sifat-sifat vektor, vektor pada bidang datar R^2 , vektor pada bidang ruang R^3 , dan proyeksi vektor.

5.2.1 Pengertian Vektor

Vektor adalah besaran yang memiliki arah dan nilai seperti kecepatan, percepatan, gaya, dan perpindahan dll (Jumini, 2018). Oleh karena itu, jika dua vektor memiliki nilai dan arah yang sama, maka keduanya adalah sama, tidak peduli di mana vektor tersebut berada. Sedangkan skalar adalah suatu besaran tanpa arah, seperti waktu, panjang, suhu, tinggi, dll. (Sa'diyah *et al.*, 2022). **Tabel 5.2** di bawah ini dapat digunakan untuk menjelaskan perbedaan antara skalar dan vektor.

Tabel 5. 1 Perbedaan Vektor dan Skalar

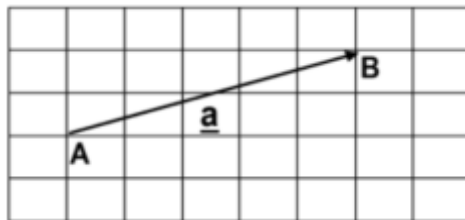
VEKTOR	SKALAR
Besaran yang mempunyai arah	Besaran tanpa arah
Contoh: gaya, kecepatan, percepatan, pergeseran/translasi, dll	Contoh: luas, panjang, tinggi, suhu, dll

VEKTOR	SKALAR
Penulisan simbol: huruf kecil atau besar dengan strip di bawah, misal $\underline{a}$, $\underline{P}$, $\underline{DF}$,... atau cara tulis lain dengan tanda panah di atas atau dibawah huruf	Penulisan simbol: huruf kecil atau besar tanpa strip di bawah, misal : a , b , D , M
Ada aturan tentang aljabar vektor	Operasi pada skalar mengikuti aturan pada aljabar dasar

Sumber: Sa'diyah *et al.*, 2022

5.2.2 Notasi Vektor

Agar vektor tidak tertukar dengan besaran skalar, mereka diberi notasi khusus. (Lipschuttz, S. and Lipson, 2002). Notasi vektor dapat ditulis dengan tanda panah atau huruf kecil dengan garis bawah. Lihat **Gambar 5.2** berikut.



Tabel 5. 2 Notasi Vektor
(Sumber : Jumini, 2018)

Keterangan :

A disebut titik pangkal dan **B** disebut titik ujung vektor.

Vektor **AB** ditulis $\overrightarrow{AB}$ atau huruf kecil $\underline{a}$.

5.2.3 Sifat - Sifat Vektor

Beberapa sifat-sifat vektor dapat dinyatakan sebagai berikut (Maharani, S & Andari, 2020) :

1. $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$
2. $1 \underline{a} = \underline{a}$
3. $0 \underline{a} = \underline{0}$
4. $m \underline{0} = \underline{0}$
5. $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
6. $m (\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$
7. $(m + n) \underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$

5.2.4 Vektor Pada Bidang Datar R²

Vektor-vektor yang terletak pada bidang datar (ruang dimensi dua) disebut vektor pada bidang datar (R^2). Vektor pada bidang datar (R^2) dapat digambarkan dengan titik awalnya di U (u_1, v_1) dan titik akhirnya di V (u_2, v_2) sebagai berikut :

$$\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \text{ atau } \underline{u} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}.$$

Pada bagian ini akan diberikan tentang operasi penjumlahan vektor, operasi pengurangan vektor, operasi perkalian vektor dengan bilangan real (skalar) dan operasi perkalian dua vektor (Raharjo, 2009).

1. Operasi Penjumlahan Vektor

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$

Contoh :

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

maka $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4 \\ -1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Operasi Pengurangan Vektor

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}$

Contoh :

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

maka $\underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. Operasi Perkalian Vektor dengan Bilangan Real (Skalar)

Jika $\underline{u}$ suatu vektor dan k adalah skalar, maka $k\underline{u}$ atau $\underline{u}k$ adalah suatu vektor dengan kemungkinan :

1. Jika $k > 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali $\underline{u}$ dan searah dengan $\underline{u}$.
2. Jika $k < 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali $\underline{u}$ dan arahnya berlawanan dengan $\underline{u}$.
3. Jika $k = 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor nol.

Contoh :

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ maka } 2\underline{u} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jika } \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ maka } \frac{1}{2}\underline{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Operasi Perkalian Dua Vektor

Dua metode dapat digunakan untuk melakukan perkalian vektor sebagai berikut :

a. Sudut antara kedua vektor diketahui

Jika vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dan sudut yang dibentuk oleh vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah θ . Sebagai berikut dirumuskan perkalian antara vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \theta$$

Contoh:

Jika vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ serta sudut antara kedua vektor adalah 60° , tentukan hasil kali kedua vektor tersebut.

Jawab:

Diketahui dua buah vektor sebagai berikut :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ maka } u_1 = 5 \text{ dan } u_2 = 1$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3 \text{ dan } v_2 = 2$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{v} &= |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \theta \\ &= \sqrt{26} \cdot \sqrt{13} \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{26} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{338}\end{aligned}$$

Jadi, hasil kali vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah $= \frac{1}{2} \sqrt{338}$

b. Sudut antara kedua vektor tidak diketahui

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Hasil kali kedua vektor dirumuskan sebagai berikut :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Contoh:

Tentukan hasil kali kedua vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ maka } u_1 = -1 \text{ dan } u_2 = 7$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3 \text{ dan } v_2 = -2$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= -1(3) + 7(-2) \\ &= -3 + (-14) \\ &= -17\end{aligned}$$

Jadi, hasil kali vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah $= -17$.

Selain itu, kita dapat menentukan besar sudut yang dibentuk oleh kedua vektor dalam sistem koordinat kartesius dengan menggunakan rumus berikut :

$$\cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\underline{u}| |\underline{v}|}$$

atau

$$\cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}}$$

Nilai $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ berlaku jika dua vektor saling tegak lurus, di mana vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah vektor tak nol.

Contoh :

Jika vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, tentukan sudut antara kedua vektor tersebut.

Jawab :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ maka } u_1 = -1 \text{ dan } u_2 = 7$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3 \text{ dan } v_2 = -2$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\text{Maka, } \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$= -1(3) + 7(-2)$$

$$= -3 + (-14)$$

$$= -17$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|u| |v|} \\ &= \frac{-17}{\sqrt{50} \sqrt{13}} \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{-17}{\sqrt{50} \sqrt{13}} \right) \\ &= 131.82^\circ\end{aligned}$$

Jadi, sudut antara vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ adalah 131.82° .

5.2.5 Vektor Pada Bidang Ruang R³

Vektor-vektor yang terletak pada bidang ruang (ruang dimensi tiga) disebut vektor pada bidang ruang (R^3). Vektor pada bidang ruang (R^3) dapat digambarkan dengan titik awalnya di $U (u_1, v_1, w_1)$ dan titik akhirnya di $V (u_2, v_2, w_2)$ sebagai berikut :

$$\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{pmatrix} \text{ atau } \underline{u} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{pmatrix}.$$

Operasi penjumlahan vektor, pengurangan vektor, perkalian vektor dengan bilangan real (skalar), dan perkalian dua vektor dibahas dsebagai berikut. (Maharani, S & Andari, 2020).

1. Operasi penjumlahan Vektor

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } \underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Contoh :

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } \underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+4 \\ 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Operasi Pengurangan Vektor

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } \underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix}$$

Contoh :

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } \underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Operasi Perkalian Vektor dengan Bilangan Real (Skalar)

Jika $\underline{u}$ suatu vektor dan k adalah skalar, maka $k\underline{u}$ atau $\underline{u}k$ adalah suatu vektor dengan kemungkinan (Amir, M.F & Prasajo, 2016):

1. Jika $k > 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali $\underline{u}$ dan searah dengan $\underline{u}$.
2. Jika $k < 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor yang besarnya k kali $\underline{u}$ dan arahnya berlawanan dengan $\underline{u}$.
3. Jika $k = 0$ maka $k\underline{u}$ adalah vektor nol.

Contoh :

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ maka } 3\underline{u} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jika } \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ maka } \frac{1}{2}\underline{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Operasi Perkalian Dua Vektor

Dua metode dapat digunakan untuk melakukan perkalian vektor sebagai berikut :

a. Sudut antara kedua vektor diketahui

Jika vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dan sudut yang dibentuk oleh vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah θ .

Sebagai berikut dirumuskan perkalian antara vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \theta$$

Contoh:

Jika vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ serta sudut antara kedua vektor adalah 30° , tentukan hasil kali kedua vektor tersebut !

Jawab:

Jika diketahui : $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $u_1 = 3$, $u_2 = 6$ dan $u_3 = 1$

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 36 + 1} = \sqrt{46}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3, v_2 = -2 \text{ dan } v_3 = 6$$

$$\begin{aligned} |\underline{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga, } \underline{u} \cdot \underline{v} &= |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \theta \\ &= \sqrt{46} \cdot 7 \cos 30^\circ \\ &= \sqrt{46} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{7}{2} \sqrt{138} \end{aligned}$$

Oleh karena itu, hasil kali vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah $= \frac{7}{2} \sqrt{138}$

b. Sudut antara kedua vektor tidak diketahui

$$\text{Jika } \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Hasil kali kedua vektor dirumuskan sebagai berikut :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Contoh:

Jika diketahui vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, tentukan hasil kali antara kedua vektor tersebut !

Jawab:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ maka } u_1 = 3, u_2 = 6 \text{ dan } u_3 = 1$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3, v_2 = -2 \text{ dan } v_3 = 6$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= 3(3) + 6(-2) + 1(6) \\ &= 9 + (-12) + 6 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, hasil kali vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah = 3.

Selain itu, kita dapat menentukan besar sudut yang dibentuk oleh kedua vektor dalam sistem koordinat kartesius dengan menggunakan rumus berikut :

$$\cos \theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\underline{u}| |\underline{v}|}$$

atau

$$\cos \theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}$$

Nilai $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ berlaku jika dua vektor saling tegak lurus, di mana vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah vektor tak nol.

Contoh :

Jika diketahui vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, tentukan sudut antara kedua vektor tersebut.

Jawab :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ maka } u_1 = 0, u_2 = -1 \text{ dan } u_3 = 2$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ maka } v_1 = 3, v_2 = -2 \text{ dan } v_3 = 4$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } \underline{u} \cdot \underline{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= 0(3) + -1(-2) + 2(4) \\ &= 0 + 2 + 8 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\underline{u}| |\underline{v}|} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5} \sqrt{29}} \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{5} \sqrt{29}} \right) \\ &= 33.86^\circ \end{aligned}$$

Jadi, sudut antara vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah 33.86° .

5.2.6 Proyeksi Vektor

Proyeksi vektor terbagi atas 2 jenis yaitu proyeksi skalar orthogonal dan proyeksi vektor orthogonal, sebagai berikut (Akbar, 2022).

a. Proyeksi Skalar Orthogonal

Rumus proyeksi vektor ortogonal diperoleh dengan membagikan perkalian vektor dengan perkalian titik vektor dengan panjang kuadrat vektor, seperti berikut.

Proyeksi vektor orthogonal $\underline{u}$ pada $\underline{v} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \cdot \underline{v}$

Proyeksi vektor orthogonal $\underline{v}$ pada $\underline{u} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{|\underline{u}|^2} \cdot \underline{u}$

Contoh :

Diketahui $\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Tentukan :

- Proyeksi skalar orthogonal $\underline{u}$ pada $\underline{v}$
- Proyeksi skalar orthogonal $\underline{v}$ pada $\underline{u}$
- Proyeksi vektor orthogonal $\underline{u}$ pada $\underline{v}$
- Proyeksi vektor orthogonal $\underline{v}$ pada $\underline{u}$

Jawab :

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $u_1 = 5$, $u_2 = 7$ dan $u_3 = 2$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka $v_1 = 3$, $v_2 = -2$ dan $v_3 = 4$

Sehingga, $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$$= 5(3) + 7(-2) + 2(4)$$

$$= 15 + (-14) + 8$$

$$= 9$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 49 + 4} = \sqrt{78}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

Maka,

a. Proyeksi skalar orthogonal $\underline{u}$ pada $\underline{v} = \frac{u,v}{|v|}$

$$= \frac{9}{\sqrt{29}}$$

b. Proyeksi skalar orthogonal $\underline{v}$ pada $\underline{u} = \frac{v,u}{|u|}$

$$= \frac{9}{\sqrt{78}}$$

c. Proyeksi vektor orthogonal $\underline{u}$ pada $\underline{v} = \frac{u,v}{|v|^2} \cdot \underline{v}$

$$= \frac{9}{29} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d. Proyeksi vektor orthogonal $\underline{v}$ pada $\underline{u} = \frac{v,u}{|u|^2} \cdot \underline{u}$

$$= \frac{9}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Akbar, R. O. (2022) *Buku Ajar Aljabar Linier*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom.
- Amir, M.F & Prasojo, B. . (2016) *Buku Ajar Matematika Dasar*. Edited by U. PRESS. Universitas Muhammadiyah Sidoarjo: Universitas Muhammadiyah Sidoarjo.
- Jumini, S. (2018) *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Edited by Hamzah. Mangku Bumi.
- Lipschuttz, S. and Lipson, M. (2002) *Aljabar Linear*. Edited by in Schaum' Outlines. 3rd edn. Erlangga.
- Maharani, S & Andari, T. (2020) *Aljabar Linear Elomenter*. Madiun: UNIPMA Press (Anggota IKAPI).
- Raharjo, D. M. E. (2009) *Vektor Jenjang Dasar*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Sa'diyah, A. *et al.* (2022) *Vektor dan Skalar, Fisika Dasar Pada Industri*. Edited by D. M. Wijayanti. Semarang: CV. Pilar Nusantara.

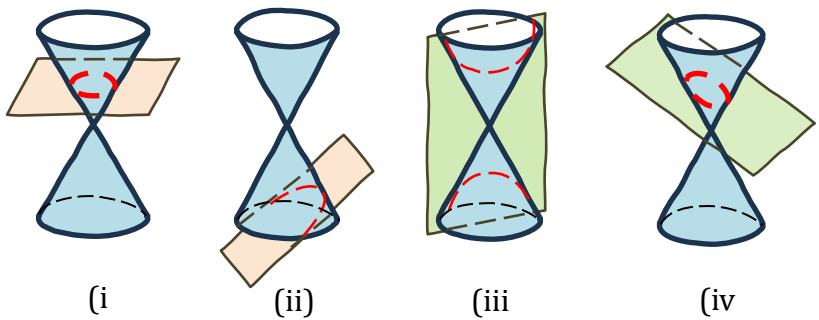
BAB 6

IRISAN KERUCUT

Oleh Rifaldy Atlant Tungga

6.1 Pendahuluan

Irisan kerucut didefinisikan sebagai bidang dua dimensi yang diperoleh dari hasil irisan antara sebuah kerucut dengan sebuah bidang datar. Berikut ilustrasi dari hasil irisan antara sebuah kerucut dengan sebuah bidang datar.



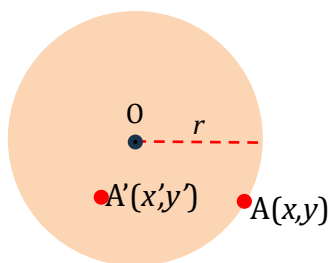
Gambar 6. 1 Irisan Kerucut terhadap Bidang

Dari Gambar 6.1, dapat dilihat terdapat 4 jenis irisan kerucut. Untuk gambar (i), hasil irisannya merupakan lingkaran. Untuk gambar (ii), hasil irisannya adalah sebuah kurva parabola. Untuk gambar (iii), hasil irisannya memberikan sebuah hiperbola. Sedangkan, untuk gambar (iv), hasil irisannya adalah sebuah elips.

Pada Bab ini, akan dibahas keempat jenis irisan kerucut tersebut.

6.2 Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan semua titik pada bidang yang berjarak tetap (jari-jari) dari suatu titik tetap (pusat) (Brown, 2011). Berikut adalah ilustrasi dari sebuah lingkaran dengan pusat O dan Panjang jari-jari r satuan Panjang.



Gambar 6. 2 Lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r

Perhatikan bahwa A adalah suatu titik dengan koordinat pasangan terurut (x,y) yang terletak pada lingkaran. Sehingga, (x,y) **akan selalu memenuhi** persamaan tertentu dari lingkaran tersebut, yaitu persamaan lingkaran. Sedangkan, titik A' dengan koordinat pasangan terurut (x',y') tidak terletak pada lingkaran, melainkan di dalam lingkaran. Sehingga, $A'(x',y')$ **tidak akan memenuhi** persamaan lingkaran tersebut.

6.2.1 Persamaan Lingkaran

Berdasarkan letak pusatnya, persamaan lingkaran terbagi menjadi dua, yakni lingkaran berpusat di titik $(0,0)$ dan lingkaran yang berpusat di titik (a,b) .

a. Persamaan Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r

Misalkan (x,y) adalah himpunan semua titik yang terletak pada lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan panjang jari-jari r , maka (x,y) akan memenuhi persamaan lingkaran :

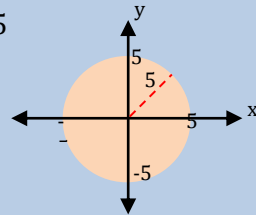
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.1)$$

Contoh: Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada titik $O(0,0)$ dengan panjang jari-jari 5 cm !

Jawab: Menggunakan persamaan (2.1), diperoleh persamaan lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan panjang jari-jari 5 cm.

$$x^2 + y^2 = 25$$

Dengan ilustrasi sebagai berikut,



b. Persamaan Lingkaran dengan pusat $A(a,b)$ dan jari-jari r

Misalkan (x,y) adalah himpunan semua titik yang terletak pada lingkaran dengan pusat $A(a,b)$ dan panjang jari-jari r , maka (x,y) akan memenuhi persamaan lingkaran :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.2)$$

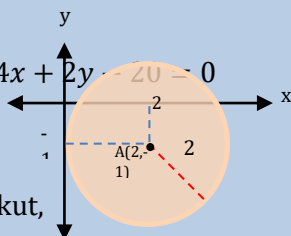
Contoh : Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada titik $A(2,-1)$ dengan panjang jari-jari 2 cm !

Jawab: Menggunakan persamaan (2.2), diperoleh persamaan lingkaran dengan pusat $(2,-1)$ dan panjang jari-jari 2 cm.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25 \quad (2.3)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \quad (2.4)$$

Dengan ilustrasi sebagai berikut,



Persamaan (2.4) termasuk kedalam bentuk umum persamaan lingkaran. Dimana bentuk umum persamaan lingkaran diberikan oleh:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (2.5)$$

Persamaan lingkaran dalam bentuk umum persamaan (2.5) memiliki pusat $(a, b) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan panjang jari-jari r diberikan oleh

$$r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} \quad (2.6)$$

Contoh: Tentukan titik pusat dan panjang jari-jari dari persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$$

Jawab :

Dari persamaan umum lingkaran tersebut, diperoleh $A = -2$, $B = 6$, dan $C = -5$. Sehingga diperoleh pusat

$$(a \ b) = \left(-\frac{-2}{2} \ -\frac{6}{2} \right) = (1 \ -3)$$

dan jari-jari

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(6)^2}{4} + 5} \\ &= \sqrt{4 + 9 + 5} \end{aligned}$$

6.2.2 Garis Singgung Lingkaran

Berdasarkan letak pusatnya, persamaan garis singgung lingkaran terbagi menjadi dua, yakni:

- Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat $(0,0)$

Misalkan sebuah lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan Panjang jari-jari r , disinggung oleh sebuah garis l pada titik $A(x_1, y_1)$. Maka persamaan garis l diberikan oleh

$$x_1x + y_1y = r^2 \quad (2.7)$$

Contoh: Sebuah lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dengan jari-jari 4 disinggung oleh sebuah garis k pada titik $(-2,1)$. Tentukanlah persamaan garis l

Jawab: Dari soal diketahui bahwa titik singgung adalah di $A(-2,1)$, sehingga menggunakan persamaan (2.7), diperoleh persamaan garis singgung k ,

$$\begin{aligned} -2x + y &= 16 \\ 2x - y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

- b. Persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (a,b)

Misalkan sebuah lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ dan Panjang jari-jari r , disinggung oleh sebuah garis l pada titik $A(x_1, y_1)$. Maka persamaan garis l diberikan oleh

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 \quad (2.8)$$

Contoh: Sebuah lingkaran dengan pusat $(1,3)$ dengan jari-jari 5 disinggung oleh sebuah garis k pada titik $(2,-3)$. Tentukanlah persamaan garis l

Jawab: Dari soal diketahui bahwa titik singgung adalah di $A(2,-3)$ dan pusatnya adalah di $P(1,3)$, sehingga menggunakan persamaan (2.8), diperoleh persamaan garis singgung k ,

$$\begin{aligned} (1 - 2)(x - 2) + (3 - (-3))(y - (-3)) &= 25 \\ -x + 2 + 6y + 18 &= 25 \\ -x + 6y &= -5 \\ x - 6y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Rumus proyeksi skalar ortogonal diperoleh dengan membagikan Perkalian titik vektor terhadap panjang vektor, seperti berikut.

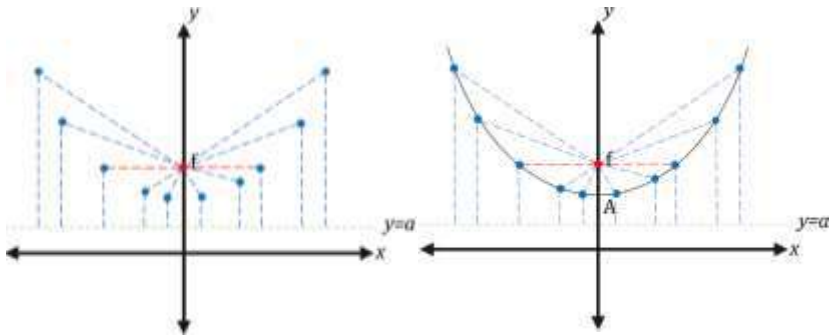
Proyeksi skalar orthogonal $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Proyeksi skalar orthogonal $\mathbf{v}$ pada $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

6.3 Parabola

Parabola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang datar yang jaraknya ke titik tertentu (titik fokus) sama dengan jaraknya ke suatu garis tertentu (garis direktris).

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan ilustrasi berikut,



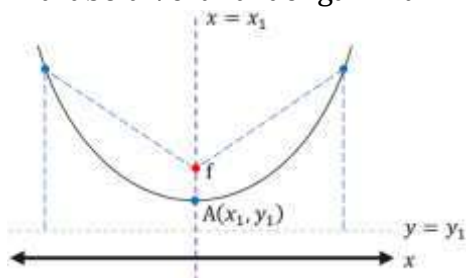
Perhatikan bahwa, pada gambar kiri, setiap titik berwarna biru memiliki jarak yang sama ke titik f dan ke garis $y = a$, jika kita membuat titik berwarna biru lebih banyak, maka akan diperoleh sebuah parabola seperti pada gambar di sebelah kanan.

Titik f disebut sebagai *titik focus*, sedangkan garis $y = a$ disebut sebagai *garis direktris* (garis arah), dan tali busur berwarna merah disebut sebagai *latus rectum*, tali busur ini adalah satu-satunya tali busur yang tegak lurus terhadap garis simetrisnya (sb-y)

Berdasarkan arahnya, parabola terbagi menjadi dua, yakni *parabola vertical* (terbuka ke atas atau ke bawah) dengan titik puncak $A(x_1, y_1)$ dan *parabola horizontal* (terbuka ke kanan atau ke kiri) dengan titik puncak $B(x_2, y_2)$.

6.3.1 Persamaan Umum Parabola

a. Persamaan Parabola Vertikal dengan Titik Puncak $A(x_1, y_1)$



Secara umum, persamaan parabola vertikal dengan titik puncak $A(x_1, y_1)$, diberikan oleh :

$$(x - x_1)^2 = 4p(y - y_1) ; \text{terbuka ke atas}$$

$$(x - x_1)^2 = -4p(y - y_1) ; \text{terbuka ke bawah}$$

Dimana,

- Persamaan Direktriiks :

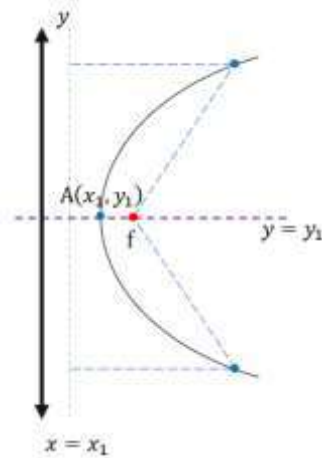
1. $y = y_1 - p$; terbuka ke atas

2. $y = y_1 + p$; terbuka ke bawah

- Sumbu simetri : $x = x_1$

- Panjang Latus Rectum : $4p$

b. Persamaan Parabola Horizontal dengan Titik Puncak $A(x_1, y_1)$



Secara umum, persamaan parabola horizontal dengan titik puncak $A(x_1, y_1)$, diberikan oleh :

$$(y - y_1)^2 = 4p(x - x_1); \text{ Terbuka ke Kanan}$$

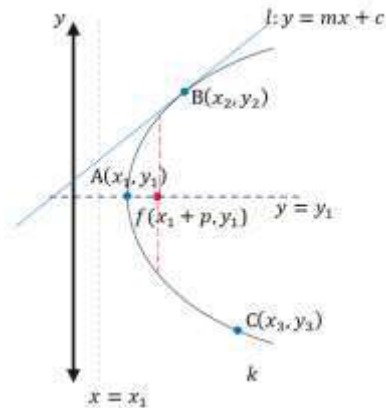
$$(y - y_1)^2 = -4p(x - x_1); \text{ Terbuka ke Kiri}$$

Dimana,

- Persamaan Direktriks :
 1. $x = x_1 - p$; terbuka ke kanan
 2. $x = x_1 + p$; terbuka ke kiri
- Sumbu simetri : $y = y_1$
- Panjang Latus Rectum : $4p$

6.3.2 Persamaan Garis Singgung Parabola

a. Persamaan Garis Singgung Parabola Horizontal



Perhatikan pada gambar diatas, diberikan sebuah parabola horizontal dengan titik puncak $A(x_1, y_1)$ dan titik fokus $f(x_1 + p, y_1)$, dimana persamaan parabolanya diberikan oleh $(y - y_1)^2 = 4p(x - x_1)$. Perhatikan bahwa, garis l dan parabola, berpotongan pada titik B. Sehingga,

$$\begin{aligned} (y - y_1)^2 &= 4p(x - x_1) \\ (mx + c - y_1)^2 &= 4p(x - x_1) \\ m^2x^2 + 2mxc + c^2 - 2(mx + c)y_1 + y_1^2 &= 4px - 4px_1 \end{aligned}$$

Persamaan di atas adalah persamaan kuadrat. Menggunakan aturan nilai diskriminan, karena garis l bersinggungan dengan kurva parabola, maka nilai diksriminannya adalah 0 ($D = 0$)

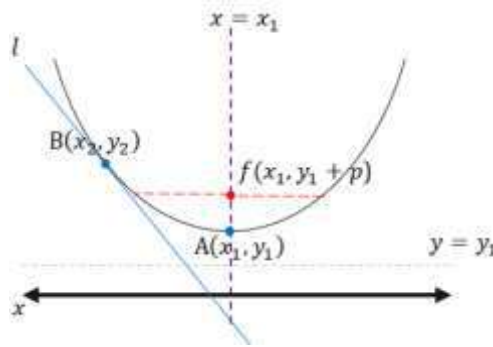
$$\begin{aligned} m^2x^2 + 2(mc - my_1 - 2p)x + ((c - y_1)^2 + 4px_1) &= 0 \\ 4p^2 - 4mp(c - y_1) - 4m^2px_1 &= 0 \\ p - m(c - y_1) - m^2x_1 &= 0 \\ \frac{p}{m} - mx_1 + y_1 &= c \end{aligned}$$

Sehingga persamaan garis l diberikan oleh

$$\begin{aligned}y &= mx + c \\y &= mx + \frac{p}{m} - mx_1 + y_1 \\y - y_1 &= m(x - x_1) + \frac{p}{m}\end{aligned}$$

Dengan m adalah gradien dari persamaan garis l , sedangkan (x_1, y_1) merupakan titik puncak dari parabola.

b. Persamaan Garis Singgung Parabola Vertikal



Perhatikan pada gambar diatas, diberikan sebuah parabola vertical dengan titik puncak $A(x_1, y_1)$ dan titik fokus $f(x_1, y_1 + p)$, dimana persamaan parabolanya diberikan oleh $(x - x_1)^2 = 4p(y - y_1)$. Perhatikan bahwa, garis l dan parabola, berpotongan pada titik B. Sehingga,

$$\begin{aligned}(x - x_1)^2 &= 4p(y - y_1) \\ \left(\frac{y - c}{m} - x_1\right)^2 &= 4p(y - y_1) \\ (y - c - mx_1)^2 &= 4pm^2(y - y_1) \\ y^2 - 2yc + c^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1(y - c) &= 4pm^2(y - y_1)\end{aligned}$$

Persamaan di atas adalah persamaan kuadrat, sehingga Menggunakan aturan nilai diskriminan, karena garis l bersinggungan dengan kurva parabola, maka nilai diskriminannya adalah 0 ($D = 0$)

$$\begin{aligned} 16pm^2(pm^2 + mx)1 + c - y_1) &= 0 \\ pm^2 + mx)1 + c - y_1 &= 0 \\ c &= y_1 - pm^2 - mx_1 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan garis l diberikan oleh

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= mx + y_1 - pm^2 - mx_1 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) - pm^2 \end{aligned}$$

Dengan m adalah gradien dari persamaan garis l , sedangkan (x_1, y_1) merupakan titik singgung pada parabola.

Contoh: Tentukan persamaan parabola horizontal yang puncaknya di $(2,1)$ dengan latus rectum 8 satuan panjang. Tentukan juga persamaan garis singgungnya yang kemirigannya

Jawab: Dari soal diketahui $A(x_1, y_1) = (2, 1)$ dan $4p = 8$, sehingga $p = 2$, dan nilai $m = 3$. Akan dicari terlebih dahulu persamaan parabolanya. Karena parabolanya terbuka kesamping, maka digunakan persamaan

$$\begin{aligned} (y - y_1)^2 &= 4p(x - x_1) \\ (y - 1)^2 &= 8(x - 2) \end{aligned}$$

Sedangkan, persamaan garis singgungnya di berikan oleh

$$\begin{aligned} (y - y_1) &= m(x - x_1) + \frac{p}{m} \\ (y - 1) &= 3(x - 2) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

6.4 Elips

Elips didefinisikan sebagai lokasi titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu (titik fokus), selalu tetap dan selalu sama dengan $2a$. Dimana, $2a$ adalah jarak terjauh antara dua titik pada elips yang bisa dibuat (sumbu mayor) dan $2a$ melebihi jarak antara dua titik fokus.

6.4.1 Persamaan Elips

Berdasarkan definisi elips yang telah dijelaskan sebelumnya, maka dapat dicari persamaan umum elips, untuk elips yang berpusat pada titik $(0, 0)$ dengan panjang sumbu mayor dan minor berturut-turut $2a$ dan $2b$ serta titik fokus pada titik $(-p, 0)$ dan $(p, 0)$. Dimana,

$$\begin{aligned}
 2a &= d(P_1, B) + d(P_2, B) \\
 \sqrt{(x_2 + p)^2 + y_2^2} &= 2a - \sqrt{(x_2 - p)^2 + y_2^2} \\
 2x_2p &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x_2 - p)^2 + y_2^2} - 2x_2p \\
 a^4 + x_2^2p^2 &= a^2(x_2^2 + p^2 + y_2^2) \\
 a^4 + x_2^2p^2 &= a^2x_2^2 + a^2p^2 + a^2y_2^2 \\
 a^2(a^2 - p^2) + x_2^2(p^2 - a^2) &= a^2y_2^2 \\
 a^2b^2 &= x^2b^2 + y^2a^2 \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

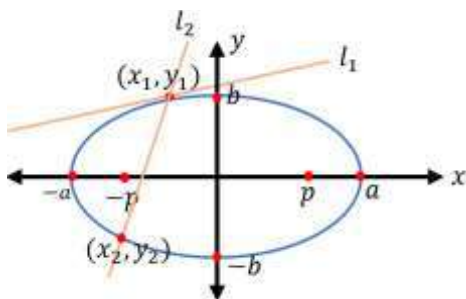
Sehingga, diperoleh persamaan elips yang berpusat di titik $(0, 0)$ dengan jarak sumbu mayor $= 2a$ dan jarak sumbu minor $= 2b$. Dengan titik fokus pada titik $(p, 0)$ dan $(-p, 0)$ dimana $p^2 = a^2 - b^2$

Untuk persamaan elips yang berpusat di sebarang titik (x_1, y_1) , dapat ditentukan dengan cara yang sama sehingga diperoleh

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(x - y_1)^2}{b^2} = 1$$

6.3.2 Persamaan Garis Singgung Elips

Perhatikan gambar berikut !



Dari gambar di samping, dapat dilihat bahwa l_1 adalah garis singgung elips yang berpusat di titik $(0,0)$, dimana titik singgungnya terletak pada (x_1, y_1) . Terdapat juga garis l_2 yang memotong titik (x_1, y_1) yang melalui titik (x_2, y_2) .

Karena kedua titik tersebut sama-sama terletak pada elips, maka kedua titik tersebut mestinya memenuhi persamaan elips, dimana :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ \& } \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

atau

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \text{ \& } b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

dengan mengurangkan kedua persamaan, diperoleh

$$b^2(x_2^2 - x_1^2) + a^2(y_2^2 - y_1^2) = 0$$

$$-\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dimana, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ adalah gradien (m) dari garis l_2 . Perhatikan, jika titik (x_2, y_2) digeser hingga berhimpit dengan titik (x_1, y_1) maka garis l_2 akan sama dengan garis l_1 , sehingga gradiennya pun akan sama. Dimana,

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2: y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)} (x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \\ a^2 y y_1 + b^2 x x_1 &= a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 \end{aligned}$$

Perhatikan, karena $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, maka,

$$\begin{aligned} a^2 y y_1 + b^2 x x_1 &= a^2 b^2 \\ \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

adalah persamaan garis singgung elips dengan pusat $(0,0)$ di titik (x_1, y_1) .

Untuk persamaan elips dengan pusat (x_2, y_2) dan titik singgung di (x_1, y_1) , dengan menggunakan cara yang sama, diperoleh persamaan garis singgungnya,

$$\frac{(x_1 - x_2)(x - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y - y_2)}{b^2} = 1$$

Contoh: Sebuah Elips, memiliki pusat pada titik $(2,3)$ dengan titik panjang sumbu mayor 8 dan sumbu minornya 6. Tentukan persamaan elips dan persamaan garis singgunya di titik $(5,1)$

Jawab: Dari soal diketahui $a = 4$ dan $b = 3$, serta pusat $(x_2, y_2) = (2, 3)$, dan koordinat titik singgung $(x_1, y_1) = (5, 1)$. Pertama akan dicari persamaan elipsnya, yaitu

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$$

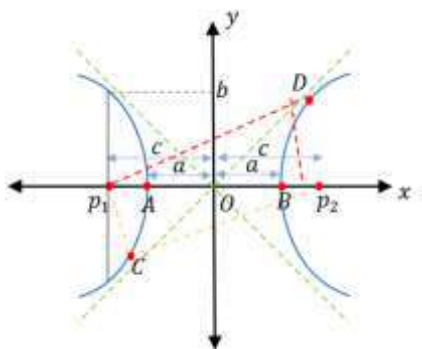
Sedangkan, persamaan garis singgungnya diberikan oleh,

$$\frac{(5-2)(x-2)}{16} + \frac{(1-3)(y-3)}{9} = 1$$

$$27x - 32y - 102 = 0$$

6.5 Hiperbola

Hiperbola didefinisikan sebagai lokasi titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik (titik fokus), selalu sama, yakni $2a$. Dimana a adalah jarak dari titik pusat Hiperbola ke titik puncak (kiri dan kanan) hiperbola. Titik fokus parabola selalu sejajar dengan titik puncak parabola, dimana jarak antara pusat parabola dan titik fokus parabola diberikan oleh suatu bilangan positif, yakni c , dengan $c > a$. Untuk lebih jelas, perhatikan gambar berikut!



Gambar 6. 3 Hiperbola dengan Pusat (0,0)

Dari gambar di atas, perhatikan bahwa $|d(p_1.C) - d(p_2.C)| = |d(p_1.D) - d(p_2.D)| = 2a$. Dan $b^2 = c^2 - a^2$. Ruas garis AB disebut sebagai sumbu nyata, sedangkan ruas garis pada sumbu y dari $y = -b$ ke $y = b$ disebut sebagai sumbu imajiner. Sumbu x disebut sebagai sumbu utama, sedangkan sumbu y disebut sumbu sekawan.

6.5.1 Persamaan Hiperbola

Berdasarkan definisi Hiperbola pada penjelasan sebelumnya, maka dapat dicari persamaan umum Hiperbola dengan pusat (0,0). Dengan panjang sumbu nyata $2a$ dan panjang sumbu imajiner $2b$. Misalkan D adalah sebarang titik pada hiperbola dengan koordinat (x_1, y_1) . Dimana,

$$\begin{aligned} d(p_1.D) - d(p_2.D) &= 2a \\ \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} &= 2a + \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} \\ x_1c - a^2 &= a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} \\ x_1^2(c^2 - a^2) + a^2(a^2 - c^2) &= a^2y_1^2 \\ x_1^2b^2 - a^2b^2 &= a^2y_1^2 \\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

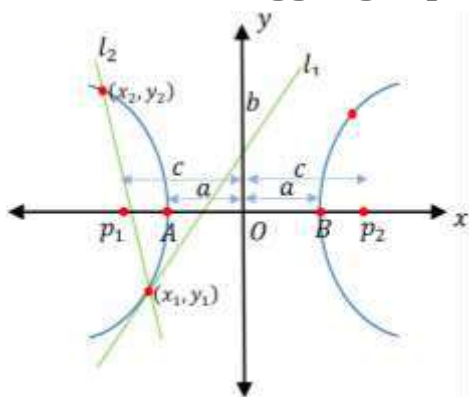
Sehingga, untuk memperumum titik D menjadi sebarang titik (x, y) diperoleh persamaan hiperbola yang berpusat di titik (0,0) dengan jarak sumbu utama $= 2a$ dan jarak sumbu imajiner $= 2b$. Dengan titik fokus pada titik $p_1(-c, 0)$ dan $p_2(c, 0)$ dimana $b^2 = c^2 - a^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Untuk persamaan parabola yang berpusat di sebarang titik (x_1, y_1) , dapat ditentukan dengan cara yang sama sehingga diperoleh

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(x - y_1)^2}{b^2} = 1$$

6.5.2 Persamaan Garis Singgung Hiperbola



Dari gambar disamping, perhatikan bahwa garis l_1 adalah garis singgung hiperbola di titik (x_1, y_1) , sedangkan garis l_2 adalah garis yang melalui titik (x_2, y_2) dan juga memotong titik (x_1, y_1) . Sehingga kedua titik ini mestinya memenuhi persamaan hiperbola, dimana

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ \& } \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

atau

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \text{ \& } b^2 x_2^2 - a^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

Dengan mengurangkan kedua ruas, diperoleh

$$b^2(x_2^2 - x_1^2) - a^2(y_2^2 - y_1^2) = 0$$

$$\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Dimana, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ adalah gradien (m) dari garis l_2 . Perhatikan, jika titik (x_2, y_2) digeser hingga berhimpit dengan titik (x_1, y_1) maka garis l_2 akan sama dengan garis l_1 , sehingga gradiennya pun akan sama. Yakni,

$$l_1 = l_2: y - y_1 = m(x - x_1)$$

dimana,

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \\ a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 &= b^2 x x_1 - b^2 x_1^2 \\ a^2 y y_1 - b^2 x x_1 &= -a^2 b^2 \\ \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

adalah persamaan garis singgung hiperbola dengan pusat $(0,0)$ di titik (x_1, y_1) . Untuk persamaan hiperbola dengan pusat (x_2, y_2) dan titik singgung di (x_1, y_1) , dengan menggunakan cara yang sama, diperoleh persamaan garis singgungnya,

$$\frac{(x_1 - x_2)(x - x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_2)(y - y_2)}{b^2} = 1$$

DAFTAR PUSTAKA

- Arifin Zainal. 2012. *Evaluasi Pembelajaran*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Islam Kementrian Agama RI.
- Arikunto Suharsimi. 2001. *Dasar-Dasar Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Asrul, dkk. 2014. *Evaluasi Pembelajaran*. Medan: Cipta pustaka Media.
- Danial, D., Nurjannah, N., & Mirna, M. 2019. *Evaluation of The Learning Program of Mathematics Study Program at Islamic Institute Of Muhammadiyah Sinjai*. *Matematika Dan Pembelajaran*, 7(1), 65. <https://doi.org/10.33477/mp.v7i1.1046>.
- Fitriani. 2019. Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa SMP. *JTMT: Journal Tadris Matematika*, 01(01), 25–30. <http://journal.iaimsinjai.ac.id/index.php/Jtm/article/view/393>.
- Hamalik, Oemar. 2010. *Manajemen Pengembangan Kurikulum*. Bandung : PT Remaja Rosdakarya.
- Elis Ratnawulan. 2014. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung: Penerbit pustaka.
- Ida Farida. 2017. *Evaluasi Pembelajaran*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Muhammad Afandi. 2013. *Evaluasi Pembelajaran Sekolah Dasar*. Semarang: UNISSULA Press
- Sukardi. 2009. *Evaluasi Pendidikan*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Tim Pengembangan MKDP Kurikulum dan Pembelajaran. (2011). *Kurikulum dan Pembelajaran*. Jakarta Utara: PT Raja Grafindo Persada.

BAB 7

LIMIT FUNGSI ALJABAR

Oleh A. Ika Putriani

7.1 Pendahuluan

Topik untuk bab ini mengarah pada masalah konsep limit. Limit merupakan konsep mendasar dalam matematika yang berperan untuk memahami, baik dalam konteks aljabar maupun kalkulus. Konsep ini memungkinkan kita untuk menggambarkan perilaku suatu fungsi saat variabel mendekati nilai tertentu, baik itu nilai tertentu tersebut adalah nilai yang sebenarnya ataupun tak hingga.

Pada dasarnya, limit menjawab pertanyaan: "Apa yang terjadi pada nilai suatu fungsi saat variabelnya mendekati suatu nilai tertentu?" Pertanyaan ini seringkali muncul dalam berbagai bidang ilmu, seperti matematika, fisika, ekonomi, dan banyak lagi.

7.1.1 Permasalahan yang Merujuk pada Konsep Limit

Konsep limit merupakan inti pada beberapa problem di rekayasa, fisika, dan lain-lain. Terdapat banyak keadaan yang memiliki gagasan yang sama ketika terjadi $f(x)$ saat x semakin mendekati suatu nilai konstanta c , Misal ketika sebuah alat bergerak maju secara teratur dan diketahui posisi s di sebarang waktu t , yang dinyatakan dengan $s(t)$,

Jika waktu $t = 2$, maka untuk mengetahui kecepatan benda $v(t)$ tersebut, digunakan formula sebagai berikut

$$v(t) = \frac{s(t)}{t}$$

Untuk memberikan arti untuk kecepatan sementara di atas, maka harus membahas tentang limit dari kecepatan rata-rata untuk interval yang semakin sempit.

7.1.2 Pemahaman Limit Secara Intuisi

Perhatikan rumus berikut:

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$$

Dapat dilihat rumus tersebut tidak terdefinisi pada $z = 1$, sebab pada titik $f(z)$ menghasilkan $\frac{0}{0}$. Tapi dapat ditentukan beberapa nilai $f(z)$ dengan z mendekati 1. Maka dapat dituliskan dengan menggunakan konsep limit di bawah ini:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 3$$

Dengan melakukan penguraian dan penyesuaian dengan penyebut $z - 1$ maka diperoleh

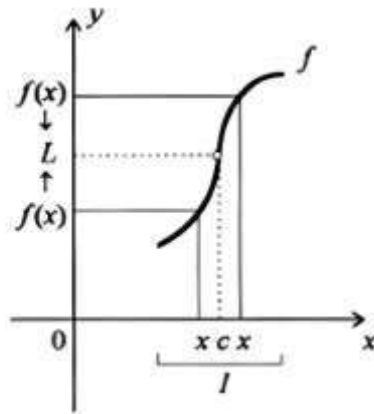
$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^3 - 1}{q - 1} &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q-1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} (q^2 + q + 1) = 1^2 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 3$.

Untuk meyakinkan bahwa pemahaman kita tentang limit benar, kita harus memiliki definisi yang jelas tentang limit, sehingga kita memiliki definisi

Definisi 7.1 Agar $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, maknanya $f(x)$ mendekati L bila x mendekati c dengan $x \neq c$.

Misal kita memiliki fungsi $y = f(x)$ dan titik tetap c , dengan x merupakan peubah yang dikatakan bebas. Agar x bisa berjalan menuju titik c , dengan persekitaran titik c memiliki titik tak hingga banyaknya dari daerah domain fungsi f kecuali kemungkinan di c sendiri. Atau dengan kata lain, domain fungsi f berbentuk selang terbuka I yang memuat c . Fungsi f terdefinisi pada $I - c$ yang ditunjukkan pada Gambar 7.1, dengan I merupakan selang terbuka yang memuat titik c (Martono, 1999).



Gambar 7. 1 Limit fungsi f

Sumber: Martono, 1999

Dapat dilihat pada gambar di atas apabila x menuju c untuk $x \neq c$ maka $f(x)$ menuju L . Aturan jarak yang dapat digunakan agar memberi makna mendekati ialah menggunakan nilai mutlak. Artinya seiring berjalannya waktu, semakin lama jarak titik sebarang titik x ke titik c semakin kecil.

Contoh 1

Carilah $\lim_{q \rightarrow 4} (3q - 2)$

Penyelesaian

Bila q mendekati 4, maka $3q - 2$ dekat terhadap $3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Ditulis dengan

$$\lim_{q \rightarrow 4} (3q - 2) = 10$$

Contoh 2

Carilah $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{(y^2 - y - 6)}{y - 3}$

Penyelesaian

Dapat dilihat bahwa $\frac{(y^2 - y - 6)}{y - 3}$ tak terdefinisi pada $y = 3$ namun tak menjadi problem. Agar tercipta ide mengenai apa yang terjadi bila y mendekati 3, dapat diperoleh dengan menggunakan alat hitung kalkulator pada fungsi yang diberikan, misal di titik 3,1 ; 3,01 ; 3,001, dan seterusnya. Namun dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 3} \frac{(y^2 - y - 6)}{y - 3} \\ &= \lim_{y \rightarrow 3} \frac{(y - 3)(y + 2)}{y - 3} \\ &= \lim_{y \rightarrow 3} (y + 2) = 5 \end{aligned}$$

Penghapusan $y - 3$ pada step kedua dilumrahkan sebab definisi limit mengabaikan di $y = 3$, dengan $\frac{y-3}{y-3} = 1$ selama $y \neq 3$.

Dari penjelasan sebelumnya limit fungsi dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Menjelaskan limit f di c adalah L , Secara tdak langsung dapat dimaknai dengan

$f(x)$ menuju L bila x menuju c dengan $x \neq c$

Dengan kata lain, dapat dimaknai bahwa

Jarak $f(x)$ ke L dibuat nilai kecil sebarang dengan menentukan jarak x ke c yang sangat kecil dan $x \neq c$,

Jika nilai yang sangat kecil dinotasikan dengan ε dan δ , maka

bila diberikan $\varepsilon > 0$ maka dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga untuk x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$,

Agar yakin pemahaman kita tentang konsep limit benar, kita harus memiliki definisi yang jelas tentang kata limit, sehingga kita memiliki

Definisi 7.2 Misalkan ada fungsi f yang didefinisikan dalam interval terbuka I yang mencakup nilai c , kecuali mungkin di titik c itu sendiri

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Varberg, 2007).

Contoh 3

Buktikan $\lim_{q \rightarrow 4} (3q - 7) = 5$.

Penyelesaian

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka akan ditentukan suatu $\delta > 0$ sehingga memenuhi

$$0 < |q - 4| < \delta \rightarrow |(3q - 7) - 5| < \varepsilon$$

atau

$$0 < |q - 4| < \delta \rightarrow |3q - 12| < \varepsilon$$

$$0 < |q - 4| < \delta \rightarrow 3|q - 4| < \varepsilon$$

Selanjutnya, pilih $0 < \delta \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, maka

$$0 < |q - 4| < \delta \leq \frac{1}{3}\varepsilon \rightarrow 3|q - 4| < 3, \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

$$\rightarrow |(3q - 7) - 5| < \varepsilon$$

sehingga terbukti $\lim_{q \rightarrow 4} (3q - 7) = 5$, ■

Contoh 4

Buktikan $\lim_{w \rightarrow 2} \frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} = 5$

Penyelesaian

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, akan ada suatu $\delta > 0$, sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi:

$$\begin{aligned}
 0 < |w - 2| < \delta &\rightarrow \left| \frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} - 5 \right| < \varepsilon \\
 &\rightarrow \left| \frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} - 5 \right| < \varepsilon \\
 &\rightarrow \left| \frac{(2w + 1)(w - 2)}{w - 2} - 5 \right| < \varepsilon \\
 &\rightarrow |(2w + 1) - 5| < \varepsilon \\
 &\rightarrow |2w - 4| < \varepsilon \\
 &\rightarrow |2(w - 2)| < \varepsilon \\
 &\rightarrow 2|w - 2| < \varepsilon \\
 &\rightarrow |w - 2| < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, pilih $0 < \delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, dari $0 < |w - 2| < \delta$ maka

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \left| \frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} - 5 \right| < \delta \\
 &\rightarrow \left| \frac{(2w + 1)(w - 2)}{(w - 2)} - 5 \right| < \delta \\
 &\rightarrow |(2w + 1) - 5| < \delta \\
 &\rightarrow |2w - 4| < \delta \\
 &\rightarrow |2||w - 2| < \delta \rightarrow 2|w - 2| < 2, \frac{1}{2}\varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left| \frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} - 5 \right| < 2, \frac{1}{2} \varepsilon$$

sehingga terbukti $\lim_{w \rightarrow 2} \left(\frac{2w^2 - 3w - 2}{w - 2} \right) = 5$,

7.1.3 Sifat-sifat Limit Fungsi Satu Titik

Sifat-sifat limit diperoleh dari penguraian definisi limit fungsi pada satu titik, sehingga menghasilkan teorema

Teorema 7.1

1. Bila $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = W$ maka $L = W$
2. Bila $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} j(x) = W$, maka
 - i. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + j(x)) = L + W = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} j(x)$
 - ii. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - j(x)) = L - W = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} j(x)$
 - iii. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)j(x)) = LW = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} j(x) \right)$
 - iv. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{j(x)} = \frac{L}{W} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} j(x)} \quad W = \lim_{x \rightarrow c} j(x) \neq 0$

(Wrede, 2007).

3. Limit pada Fungsi Sederhana

- i. $\lim_{x \rightarrow c} t = t$ t konstanta,
- ii. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- iii. $\lim_{x \rightarrow c} (qx + r) = qc + r$; q r konstanta,
- iv. $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$,
- v. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c},$$

4. Limit Polinomial Derajat n,

Bila $D_n(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \dots + d_n$, maka $\lim_{x \rightarrow c} D_n(x) = D_n(c)$

$$c \in D_f = \mathbf{R}$$

5. Bila $j(x) = \frac{D_n(x)}{D_m(x)}$; D_n D_m suku banyak, maka $\lim_{x \rightarrow c} j(x) = j(c)$
 $c \in D_f$,

dengan $D_f = \{x \in \mathbf{R}: D_m(x) \neq 0\}$,

Ilustrasi 7.1

1. Sesuai 7.1.1,

$$\lim_{z \rightarrow -2} (2z^3 - 3z^2 + 6) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 6 = -22$$

2. Sesuai 7.1.2,

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z^3 - 2z + 1)}{z^2 - 3z} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2}$$

3. Supaya Teorema 2.2.4 atau 2.2.5 bisa dipergunakan, bentuk fungsinya harus diubah terlebih dahulu supaya hasilnya tidak $\frac{0}{0}$.

Dapat diperhatikan pada ilustrasi berikut

$$\lim_{w \rightarrow 2} \frac{w^2 - w - 2}{w - 2} = \lim_{w \rightarrow 2} \frac{(w+1)(w-2)}{w-2} = \lim_{w \rightarrow 2} (w + 1) = 3$$

Soal Latihan

Berlaku untuk nomor 1-4, buktikan limit di bawah dengan menggunakan definisi limit.

1. $\lim_{z \rightarrow a} (pz + r) = pa + r; p, r$ konstanta

$$2. \lim_{w \rightarrow 2} (-w^2 + 3w) = 2$$

$$3. \lim_{v \rightarrow a} v^2 = a^2$$

$$4. \lim_{v \rightarrow -1} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) = -2$$

Berlaku untuk nomor 5-8, hitunglah limit di bawah dengan menggunakan teorema limit.

$$5. \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z^2 + 5z + 6)}{(z + 2)}$$

$$6. \lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3 - 8}{v - 2}$$

$$7. \lim_{v \rightarrow 4} \frac{v - \sqrt{v} - 2}{v - 4}$$

$$8. \lim_{s \rightarrow 8} \frac{s - 8}{\sqrt[3]{s} - 2}$$

7.1.4 Limit Kiri dan Kanan

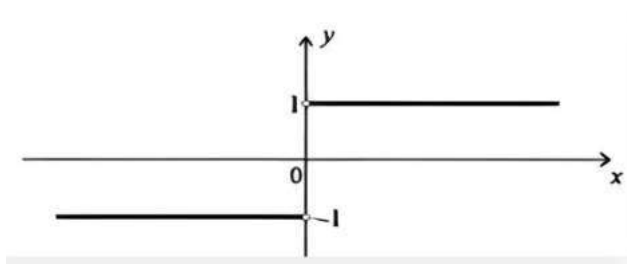
Sebelum masuk pada pembahasan konsep limit kiri dan limit kanan, dapat diperhatikan ilustrasi di bawah.

Ilustrasi 7.2

Diberikan

$$j(x) = \frac{|2x|}{2x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Dapat dilihat grafik fungsi di bawah



Gambar 7. 2 Grafik Fungsi $j(x) = \frac{|2x|}{2x}$

Perhatikan pada Gambar 7.2 bahwa fungsi j terdefinisi di $D_f = \mathbb{R} - 0$,

Pada situasi di atas dapat diperoleh informasi.

1. Hasil $j(x)$ dapat diambil sebarang menuju 1 bila diambil cukup mendekati menuju 0 dari arah kanan. Situasi ini dapat dikatakan bahwa fungsi j memiliki limit kanan di 0 menghasilkan limit 1, sehingga $\lim_{x \rightarrow 0^+} j(x) = 1$,
2. Nilai $j(x)$ dapat diambil sebarang dekat menuju -1 bila diambil cukup mendekati menuju 0 dari arah kiri. Situasi ini dapat dikatakan bahwa fungsi j memiliki limit kiri di 0 dengan hasil limit 1, sehingga $\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = 1$,
3. Nilai $j(x)$ tidak menuju suatu nilai manapun bila x dibuat mendekati 0. Dari arah kiri 0, $j(x)$ mendekati -1, sedangkan dari arah kanan 0, $j(x)$ mendekati 1. Karena limitnya dari arah kiri dan dari arah kanan berbeda, sehingga dapat dikatakan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x|}{2x}$ tidak ada,

Ilustrasi 7.2 dapat dijadikan model pengenalan konsep limit kiri dan limit kanan dari fungsi j di c , sehingga diperoleh definisi berikut.

Definisi 7.3

1. Misal fungsi f didefinisikan di interval (c, e) . Limit kanan fungsi f di c ialah L yaitu $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ bila

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. Misal fungsi f didefinisikan pada selang (d, c) . Limit kanan fungsi f di c ialah L yaitu $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ bila

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < c - x < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Relasi limit kiri dan limit kanan pada fungsi satu titik dapat dilihat dalam teorema berikut.

Teorema 7.2

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

Pada teorema di atas menjelaskan bahwa limit kiri dan limit kanan fungsi f di c bisa Dihitung dengan memanfaatkan batas nilai limit fungsi di c , dengan syarat limit fungsi itu ada.

Ilustrasi 7.3

$$1. \lim_{r \rightarrow 2^+} \frac{r^2 - r - 2}{r - 2} = \lim_{r \rightarrow 2^+} \frac{(r+1)(r-2)}{r-2} = \lim_{r \rightarrow 2^+} (r + 1) = 3$$

$$2. \lim_{r \rightarrow 2^-} \frac{r^2 - r - 2}{r - 2} = \lim_{r \rightarrow 2^-} \frac{(r+1)(r-2)}{r-2} = \lim_{r \rightarrow 2^-} (r + 1) = 3$$

Akibat dari teorema 7.2 menghasilkan suatu teorema baru yang menunjukkan bahwa limit fungsi di satu titik tidak ada.

Teorema 7.3

Bila $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $f(x) = L$ tidak ada.

Contoh 5

Bila $j(v) = |v| + \frac{v-1}{|v-1|}$, buktikan bahwa $\lim_{v \rightarrow 0} j(v)$ dan $\lim_{v \rightarrow 1} j(v)$ ada.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} j(v) &= \lim_{v \rightarrow 0} \left(|v| + \frac{v-1}{|v-1|} \right) \\ &= \left| \lim_{v \rightarrow 0} v \right| + \frac{\lim_{v \rightarrow 0} (v-1)}{\left| \lim_{v \rightarrow 0} (v-1) \right|} \\ &= 0 + \frac{0-1}{|-1|} = -1 \end{aligned}$$

Agar limit kedua dapat diselesaikan, ambil selang terbuka (0,2) yang termuat 1. Selanjutnya untuk menghitung limit kiri dapat diperhatikan interval (0,1), dan interval (1,2) untuk limit kanannya.

1. Untuk interval (0,1), $0 < v < 1$ maka digunakan $|v| = v$ dan $|v-1| =$

$1-v$ demikian $j(v) = v + \frac{v-1}{1-v} = v-1$ mengakibatkan

$$\lim_{v \rightarrow 1^-} j(v) = \lim_{v \rightarrow 1^-} (v-1) = 1-1 = 0.$$

2. Untuk selang $(1,2)$, $1 < v < 2$ maka digunakan $|v| = v$ dan $|v - 1| =$

$v - 1$ demikian $j(v) = v + \frac{v-1}{1-v} = v + 1$ mengakibatkan

$$\lim_{v \rightarrow 1^+} j(v) = \lim_{v \rightarrow 1^+} (v + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Jadi karena $\lim_{v \rightarrow 1^-} j(v) \neq \lim_{v \rightarrow 1^+} j(v)$, maka $\lim_{v \rightarrow 1} j(v)$ tidak ada.

Soal-soal

Berlaku untuk soal 1-4, carilah limit nya

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 11)$

2, $\lim_{w \rightarrow -2} (w^2 + 2w - 1)$

3. $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{((2+n)^2 - 4)}{n}$

4, $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^4 - 18z^2 + 81}{(z-3)^2}$

Berlaku untuk nomor 5-8, buktikan limit di bawah dengan menggunakan definisi limit

5. $\lim_{z \rightarrow 21} (3z - 1) = -64$

6. $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{y^2 - 25}{y - 5} = 10$

7. $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2z^2 - z}{z} = -1 \right)$

8. $\lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{10n^3 - 26n^2 + 22n - 6}{(n-1)^2} = 4 \right)$

9. Jika

$$j(w) = \begin{cases} w^2 + 1 & w < 1 \\ w^2 - w + 2 & w \geq 1 \end{cases}$$

Selidikilah untuk titik $w = 1$ apakah memiliki limit .

10. Diberikan fungsi $j(w)$

$$j(w) = \begin{cases} 3 - cw & w < -1 \\ w^2 - c & w \geq -1 \end{cases}$$

Tentukan nilai c agar pada titik $w = 1$ limitnya ada.

DAFTAR PUSTAKA

- Varberg, Purcell, Ridgon. 2007. *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Wrede R., Murray R. 2007. *Schaum's Outline Kalkulus Lanjut Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.

BAB 8

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Oleh Riyama Ambarwati

8.1 Pengertian Turunan Fungsi Aljabar

Turunan fungsi atau yang juga dikenal sebagai diferensial, merupakan suatu fungsi baru yang berasal dari suatu fungsi yang sudah ada sebelumnya. Sebagai contoh, jika kita memiliki fungsi f , kita bias mendapatkan turunannya yang dinotasikan dengan f' . yang nilai dan perilakunya ditentukan oleh aturan tertentu dan akan bervariasi tergantung pada variable yang digunakan. Secara umum, turunan menggambarkan bagaimana suatu besaran berubah seiring dengan perubahan besaran lainnya. Proses untuk menemukan turunan ini dikenal sebagai diferensiasi.

Turunan fungsi aljabar melibatkan pengembangan konsep dari limit fungsi yang dapat diekspresikan secara matematis, turunan fungsi $f(x)$ terhadap variable x , dilambangkan dengan $f'(x)$ atau $\frac{df}{dx}$, didefinisikan sebagai batas dari perubahan rasio $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ saat Δx mendekati nol. Secara formal, turunan fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ini bisa disederhanakan menggunakan aturan turunan dan operasi aljabar dasar untuk mendapatkan ekspresi yang lebih sederhana untuk turunan fungsi tersebut. Turunan ini memberikan informasi tentang bagaimana fungsi berubah saat

variabel inputnya berubah, yang sangat penting dalam berbagai bidang matematika dan ilmu terapan (James Stewart, 2015).

8.2 Rumus Turunan Aljabar

Setelah memahami konsep dasar tentang turunan fungsi aljabar, langkah selanjutnya adalah mempelajari rumus-rumus yang digunakan untuk menghitung turunan fungsi aljabar. Rumus-rumus ini dibagi menjadi beberapa bagian sebagai berikut :

8.2.1 Turunan Fungsi Pangkat

Bentuk dari fungsi pangkat adalah $f(x) = x^n$. sehingga turunannya adalah $f'(x) = nx^{n-1}$.

Contoh 1 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^6$

Penyelesaian :

$$f(x) = x^6$$

$$\text{Turunannya adalah } f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$$

Contoh 2 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = 3x^4 + 2x^2$

Penyelesaian:

$$f(x) = 3x^4 + 2x^2$$

Turunannya adalah :

$$f'(x) = 3,4x^{4-1} + 2,2x^{2-1}$$

$$f'(x) = 12x^3 + 4x$$

Contoh 3 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = 4x^5 - 2x^4$

Penyelesaian :

$$f(x) = 4x^5 - 2x^4$$

Turunannya adalah :

$$f'(x) = 4,5x^{5-1} - 2,4x^{4-1}$$

$$f'(x) = 20x^4 - 8x^3$$

8.2.2 Turunan Hasil Kali Fungsi

Turunan hasil kali fungsi membahas bagaimana menghitung turunan dari hasil perkalian dua atau lebih fungsi. Untuk dua fungsi $u(x)$ dan $v(x)$, turunan hasil kali $u(x), v(x)$ dapat dihitung menggunakan aturan perkalian turunan.

Jika $f(x) = u(x), v(x)$, maka turunan $f'(x)$ dari $f(x)$ terhadap x dinyatakan sebagai :

$$f'(x) = u'(x), v(x) + u(x), v'(x)$$

Ini dikenal sebagai aturan turunan hasil kali fungsi. Aturan ini menyatakan bahwa turunan dari hasil kali dua fungsi adalah jumlah dari hasil kali turunan fungsi pertama dengan fungsi kedua dan hasil kali fungsi pertama dengan turunan fungsi kedua.

Contoh 4 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^8 y^3$.

Penyelesaian :

$$\text{Misalkan } u(x) = x^8$$

$$u'(x) = 8x^7$$

$$v(x) = y^3$$

$$v'(x) = 3y^2$$

$$\text{Maka } f'(x) = u'(x), v(x) + u(x), v'(x)$$

$$f'(x) = 8x^7y^3 + x^83y^2$$

Contoh 5 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^2, \sin(x)$

Penyelesaian :

$$\text{Misalkan } u(x) = x^2$$

$$u'(x) = 2x$$

$$v(x) = \sin(x)$$

$$v'(x) = \cos(x)$$

$$\text{Maka } f'(x) = u'(x), v(x) + u(x), v'(x)$$

$$f'(x) = (2x), \sin(x) + x^2, \cos(x)$$

Ini adalah cara umum untuk menghitung turunan dari hasil kali fungsi dalam turunan fungsi aljabar. Metode ini penting dalam pemecahan masalah di berbagai bidang matematika dan ilmu terapan.

8.2.3 Turunan Fungsi Pembagian

Turunan fungsi pembagian membahas cara menghitung turunan dari hasil pembagian dua fungsi. Untuk dua fungsi $u(x)$ dan $v(x)$, turunan hasil pembagian $\frac{u(x)}{v(x)}$ dapat dihitung menggunakan aturan turunan pembagian. Aturan turunan pembagian menyatakan bahwa jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, maka turunan $f'(x)$ dari $f(x)$ terhadap x dinyatakan sebagai :

$$f'(x) = \frac{u'(x), v(x) - u(x), v'(x)}{(v(x))^2}$$

Ini adalah aturan turunan fungsi pembagian, yang menggambarkan bahwa turunan dari hasil pembagian dua fungsi adalah selisih dari hasil perkalian turunan fungsi pembilang dengan fungsi penyebut dan hasil perkalian fungsi pembilang dengan turunan fungsi penyebut, dibagi oleh kuadrat dari fungsi penyebutnya.

Contoh 6 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{x^7}{y^2}$.

Penyelesaian :

Misalkan $u(x) = x^7$

$$u'(x) = 7x^6$$

$$v(x) = y^2$$

$$v'(x) = 2y$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^6y^2 - x^7 \cdot 2y}{y^4}$$

Contoh 7 :

Hitunglah turunan dari $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-2}$

Penyelesaian :

Pertama, kita identifikasi $u(x) = x^2 + 3x$ dan $v(x) = x - 2$

Kemudian kita turunkan masing-masing fungsi :

$$u'(x) = 2x + 3$$

$$v'(x) = 1$$

Selanjutnya, kita substitusi ke dalam rumus turunan fungsi pembagian :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - (x^2+3x)(1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3x - 6 - x^2 - 3x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 6}{(x-2)^2}$$

Contoh 8 :

Tentukan turunan dari $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$,

Penyelesaian :

Kita perlu menggunakan aturan turunan fungsi pembagian. Dalam kasus ini, kita memiliki :

$$u(x) = \sin(x)$$

$$v(x) = x^2$$

Turunan masing-masing fungsi adalah :

$$u'(x) = \cos(x)$$

$$v'(x) = 2x$$

Substitusikan ke dalam rumus turunan fungsi pembagian :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \cos(x) - 2x \sin(x)}{x^4}$$

Contoh 9 :

Carilah turunan dari $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$

Penyelesaian :

Langkah pertama adalah mengidentifikasi $u(x)$ dan $v(x)$:

$$u(x) = e^x$$

$$v(x) = \ln(x)$$

Turunan masing – masing fungsi adalah :

$$u'(x) = e^x$$

$$v'(x) = \frac{1}{x}$$

Substitusikan ke dalam rumus turunan fungsi pembagian :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \ln(x) - e^x \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \ln(x) - \frac{e^x}{x}}{(\ln(x))^2}$$

8.2.4 Turunan Pangkat dari Fungsi

Turunan pangkat dari fungsi membahas cara menghitung turunan dari fungsi yang dinyatakan dalam bentuk pangkat. Untuk sebuah fungsi $f(x) = u(x)^n$ dimana $u(x)$ adalah fungsi dasar dan n adalah bilangan bulat, turunan dari $f(x)$ terhadap x dapat dihitung menggunakan aturan turunan pangkat.

Aturan turunan pangkat menyatakan bahwa jika $f(x) = u(x)^n$, maka turunan $f'(x)$ dari $f(x)$ terhadap x adalah :

$$f'(x) = n, u(x)^{n-1}, u'(x)$$

Ini adalah aturan turunan pangkat, yang menggambarkan bahwa turunan dari fungsi pangkat adalah n kali fungsi dasar ke pangkat $n - 1$, dikalikan dengan turunan dari fungsi dasar.

Contoh 10 :

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = (4x - 2)^2$

Penyelesaian :

Kita memiliki $u(x) = 4x - 2$ dan $n = 2$

Turunan $u(x)$ adalah :

$$u'(x) = 4$$

Kemudian, kita substitusikan ke dalam rumus turunan pangkat :

$$f'(x) = n, u(x)^{n-1}, u'(x)$$

$$f'(x) = 2, (4x - 2)^{2-1}, 4$$

$$f'(x) = 8(4x - 2)^1$$

$$f'(x) = 32x - 16$$

Contoh 11 :

Hitunglah turunan dari $f(x) = (3x^2 + 2x - 1)^3$

Penyelesaian :

Kita memiliki $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$ dan $n = 3$

Turunan $u(x)$ adalah :

$$u'(x) = 6x + 2$$

Kemudian, kita substitusikan ke dalam rumus turunan pangkat :

$$f'(x) = n, u(x)^{n-1}, u'(x)$$

$$f'(x) = 3, (3x^2 + 2x - 1)^{3-1}, (6x + 2)$$

$$f'(x) = 3(3x^2 + 2x - 1)^2, (6x + 2)$$

Contoh 12 :

Tentukan turunan dari $f(x) = (\cos(x))^4$

Penyelesaian :

Dalam kasus ini, $u(x) = \cos(x)$ dan $n = 4$

Turunan $u(x)$ adalah :

$$u'(x) = -\sin(x)$$

Substitusikan ke dalam rumus turunan pangkat :

$$f'(x) = n, u(x)^{n-1}, u'(x)$$

$$f'(x) = 4, (\cos(x))^{4-1}, (-\sin(x))$$

$$f'(x) = -4, (\cos(x))^3, \sin(x)$$

8.2.5 Turunan Trigonometri

Turunan trigonometri membahas cara menghitung turunan dari fungsi trigonometri seperti $\sin(x)$ $\cos(x)$ dan $\tan(x)$, serta fungsi trigonometri invers seperti $\arcsin(x)$ $\arccos(x)$ dan $\arctan(x)$.

Aturan turunan untuk fungsi trigonometri adalah sebagai berikut :

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

$$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$$

$$f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x, \tan x$$

$$f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x, \cot x$$

$$f(x) = \sin^n x \rightarrow f'(x) = n, \sin^{n-1} x \cos x$$

$$f(x) = \cos^n x \rightarrow f'(x) = -n, \cos^{n-1} x \sin x$$

$$f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = u' \cos u$$

$$f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -u', \sin u \quad (\text{Thomas, 2017})$$

8.3 Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar

Konsep berikutnya yang perlu dipahami tentang turunan fungsi aljabar, yaitu tentang penerapan turunan fungsi aljabar. Ada beberapa contoh penerapan turunan fungsi aljabar, dimana masing-masing aplikasi memiliki konsepnya tersendiri. Berikut adalah beberapa aplikasi turunan fungsi aljabar :

1. Gradien Persamaan Garis Singgung

Salah satu metode untuk menemukan persamaan garis singgung adalah dengan menggunakan gradien atau kemiringan dari garis tersebut. Gradien fungsi $f(x)$ yang melalui titik $A(a, f(a))$ dapat ditemukan menggunakan turunan dengan rumus $m = f'(a)$.

2. Kemonotonan Fungsi

Aplikasi turunan yang lainnya adalah untuk menentukan kemonotonan suatu fungsi. Artinya, anda dapat mengetahui apakah fungsi tersebut meningkat atau menurun di interval tertentu.

Misalkan $f(x)$ memiliki turunan pada interval tertutup $[a, b]$

- Jika $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, maka fungsi naik pada interval $[a, b]$
- Jika $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$, maka fungsi turun pada interval $(a, b]$

3. Titik Stasioner

Titik stasioner yang juga dikenal sebagai titik kritis, titik ekstrim, atau titik balik, adalah titik pada kurva dimana gradien dari garis singgung kurva adalah 0 (nol).

Dalam konteks fungsi $f(x)$ yang kontinu dan terdiferensial, $f(a)$ disebut sebagai nilai stasioner dari $f(x)$ jika dan hanya jika turunan $f'(a) = 0$.

4. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

Sebelum mencari nilai maksimum dan minimum, Anda perlu memahami cara menemukan titik maksimum dan minimum terlebih dahulu.

Titik maksimum atau minimum dari suatu fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$ dapat diidentifikasi dengan langkah-langkah berikut :

- Tentukan titik-titik stasioner dengan mengatasi kondisi dimana turunan pertama fungsinya, yaitu $f'(a) = 0$ dan $f'(b) = 0$.
- Identifikasi jenis titik stasionernya (titik maksimum, titik belok, atau titik minimum) dengan menggunakan turunan kedua dari fungsi tersebut, yaitu :
 - Jika $f''(a) < 0$ maka $f(a)$ adalah nilai balik maksimum fungsi f
 - Jika $f''(a) > 0$ maka $f(a)$ adalah nilai balik minimum fungsi f

- Jika $f''(a) = 0$ maka $f(a)$ bukan merupakan nilai ekstrim dari fungsi f .
- c. Substitusikan nilai variabelnya ke dalam fungsi asli untuk menentukan nilai maksimum atau minimumnya.

Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi yang kontinu dan dapat diferensiasikan pada setiap titik di dalam interval $[a,b]$ dapat terjadi pada :

- Titik stasioner yang berada pada interval $[a. b]$
- Titik ujung interval

Dalam menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut :

- a. Identifikasi titik-titik stasioner dari fungsi $f(x)$ yang berada dalam interval $[a. b]$
 - b. Tentukan nilai fungsi pada ujung interval, yaitu $f(a)$ dan $f(b)$
 - c. Bandingkan nilai fungsi pada langkah pertama dan kedua. Nilai yang paling besar akan menjadi nilai maksimum, sedangkan nilai yang paling kecil akan menjadi nilai minimum.
5. Kecepatan dan Percepatan Benda

Ternyata, turunan juga digunakan dalam rumus-rumus bercepatan benda tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut :

- Kecepatan benda saat t detik (turunan pertama).
Rumus turunan pertama yaitu :

$$v = s' = \frac{ds}{dt}$$

- Percepatan benda saat t detik (turunan kedua).
Rumusnya ialah :

$$v = s'' = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ (Boyce dkk, 2017).}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2016). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (11th ed.)*. Wiley.
- Stewart, J. (2015). *Calculus: Early Transcendentals (8th ed.)*. Cengage Learning.
- Thomas Jr., G. B., Weir, M.D., & Hass, J. R. (2017). *Thomas' Calculus (14th ed.)*. Pearson.

BAB 9

INTEGRAL

Oleh Aprizal Resky

9.1 Pendahuluan

Pada BAB ini, kita akan mempelajari tentang Integral. Integral merupakan salah satu topik fundamental dalam matematika, terutama dalam cabang kalkulus. Integral membahas tentang konsep penghitungan luas di bawah kurva fungsi matematika serta aplikasinya dalam berbagai bidang seperti fisika, teknik, ekonomi, dan lainnya. Secara sederhana, integral adalah operasi kebalikan dari diferensiasi, yang memungkinkan kita untuk menghitung jumlah total dari suatu nilai yang berubah secara kontinu atau menemukan nilai rata-rata suatu fungsi dalam suatu interval tertentu.

Dalam kalkulus, terdapat dua jenis integral utama: integral tak tentu (*indefinite integral*) dan integral tentu (*defenite integral*). Integral memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang. Dalam fisika, integral digunakan untuk menghitung kuantitas seperti massa, momen inersia, dan energi potensial. Dalam ekonomi, integral digunakan untuk menghitung total keuntungan, total biaya, dan total pendapatan.

Studi tentang integral memerlukan pemahaman yang kuat tentang konsep turunan (diferensiasi) dan fungsi-fungsi matematika. Kemampuan untuk menggunakan integral untuk

memecahkan masalah dunia nyata sangat penting dalam banyak disiplin ilmu.

Dengan memahami konsep-konsep dasar integral, kita dapat mengembangkan kemampuan untuk menganalisis dan memodelkan berbagai situasi yang melibatkan perubahan berkelanjutan dalam matematika dan ilmu terkait.

9.2 Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*)

9.2.1 Konsep dan Notasi Dasar

Integral tak tentu adalah konsep fundamental dalam kalkulus yang berhubungan erat dengan operasi kebalikan dari diferensiasi. Integral tak tentu juga dikenal sebagai antiderivatif. Ide dasarnya adalah untuk menemukan fungsi yang, ketika dideferensialkan, menghasilkan fungsi asli.

Secara matematis, integral tak tentu dari suatu fungsi $f(x)$, yang dilambangkan sebagai

$$\int f(x)dx,$$

adalah himpunan semua fungsi yang ketika dideferensialkan akan menghasilkan fungsi $f(x)$. Notasi ini menggunakan simbol $\int$ untuk menunjukkan operasi integrasi dan dx untuk menunjukkan variabel integrasi, dalam hal ini x .

Berikut sejumlah rumus integral dasar yang perlu kalian ketahui untuk menentukan antiderivatif suatu fungsi.

Tabel 9. 1 Rumus Integral Dasar

Rumus Turunan	Rumus Integral
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int 1 dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C; r \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Sumber: Data diolah, 2024.

Contoh 1.

Tentukan $\int (x^2 - 2x + 5)dx$,

Penyelesaian:

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + C$$

Contoh 2.

Tentukan $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt &= \int (t^{-2} - 2) dt \\ &= \int t^{-2} dt - \int 2 dt \\ &= -\frac{1}{t} - 2t + C \end{aligned}$$

9.2.2 Metode untuk Menghitung Integral Tak Tentu

Adapun beberapa metode untuk menghitung integral tak tentu, yaitu:

1. Aturan Rantai

Aturan rantai (atau aturan produk) dalam integral tak tentu digunakan untuk menyelesaikan integral dari fungsi produk. Aturan ini merupakan kebalikan dari aturan rantai dalam diferensiasi. Aturan ini dinyatakan sebagai berikut:

Jika u adalah fungsi dari x dan v adalah fungsi dari u , maka integral $v(u(x))$ terhadap x adalah $\int v(u) du$ dikalikan dengan turunan dari u terhadap x , yaitu $\frac{du}{dx}$,

Dengan kata lain, jika u adalah fungsi dari x dan v adalah fungsi yang dapat diintegralkan, maka:

$$\int v(u) du = \int v dv \cdot \frac{du}{dx}$$

Mari kita lihat contoh penggunaan aturan rantai dalam mengintegrasikan suatu fungsi:

Misalkan kita ingin mengintegrasikan $\int 2x \sin(x^2) dx$,

Kita akan membuat substitusi dengan $u = x^2$, sehingga $du = 2x dx$. Ini memungkinkan kita menuliskan integral tersebut sebagai $\int \sin(u) du$.

Sekarang, integral ini langsung dapat dihitung sebagai $-\cos(u) + C$ dimana C adalah konstanta integrasi.

Kemudian, kita kembali ke variable aslinya dengan menggunakan u yang kita substitusi sebelumnya, yaitu $u = x^2$ sehingga hasil akhirnya adalah $-\cos(x^2) + C$,

2. Integral Parsial

Integral parsial adalah teknik yang digunakan untuk mengintegrasikan produk dari dua fungsi. Persamaan dasar integral parsial untuk integral tak tentu dinyatakan sebagai:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

dimana u dan v adalah fungsi yang diintegrasikan.

Berikut langkah-langkah untuk menggunakan integral parsial dalam mengintegrasikan suatu fungsi:

- 1) Pilih u dan dv .
- 2) Hitung du dan v .
- 3) Gunakan persamaan integral parsial untuk menghitung integral.

Mari kita lihat contoh penggunaan integral parsial dalam mengintegrasikan suatu fungsi:

Misalkan kita ingin mengintegrasikan $\int x \sin(x) dx$,

Pilih $u = x$ dan $dv = \sin(x) dx$, Ini menghasilkan $du = dx$ dan $v = -\cos(x)$.

Sekarang kita dapat menggunakan persamaan integral parsial:

$$\begin{aligned}\int x \sin(x) dx &= uv - \int v du \\ &= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C\end{aligned}$$

dimana C adalah konstanta integrasi.

Jadi, demikianlah cara menggunakan integral parsial dalam mengintegrasikan fungsi-fungsi yang melibatkan produk.

3. Integrasi dengan Pecahan Parsial

Integrasi dengan pecahan parsial pada integral tak tentu adalah teknik yang digunakan untuk menyelesaikan integral melibatkan pecahan rasional (atau pecahan aljabar). Teknik ini mirip dengan pembagian pecahan parsial dalam pembilang pecahan.

Pendekatan umum untuk menyelesaikan integral dengan pecahan parsial adalah sebagai berikut:

- 1) Ekspresikan pecahan dalam bentuk pecahan parsial, yaitu sebagai jumlah dari beberapa fraksi sederhana.
- 2) Integrasikan masing-masing fraksi menggunakan aturan atau teknik integrasi yang sesuai.

- 3) Jika diperlukan, gabungkan hasil integral dari masing-masing fraksi.

Berikut adalah langkah-langkah umum yang digunakan untuk menyelesaikan integral dengan pecahan parsial:

- 1) Faktorkan pembilang dan penyebut pecahan jika mungkin.
- 2) Tulis pecahan sebagai jumlah dari beberapa fraksi sederhana menggunakan dekomposisi pecahan parsial.
- 3) Integrasikan masing-masing fraksi sederhana satu per satu.
- 4) Jika perlu, gabungkan hasil integral dari masing-masing fraksi untuk mendapatkan hasil akhir integral.

Mari lihat contoh bagaimana mengintegrasikan pecahan parsial:

Misalkan kita ingin mengintegrasikan $\int \frac{1}{x^2-1} dx$,

Langkah pertama adalah menulis pecahan $\frac{1}{x^2-1}$ sebagai pecahan parsial. Kita bisa menulisnya sebagai:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai A dan B dengan mencocokkan koefisien. Kita bisa melakukan ini dengan berbagai metode, seperti metode penyamaan koefisien atau metode substitusi.

Setelah menemukan nilai A dan B , kita dapat mengintegrasikan masing-masing fraksi satu per satu. Misalnya, integral dari $\frac{A}{x-1}$ adalah $A \ln|x-1|$. dan integral dari $\frac{B}{x+1}$ adalah $B \ln|x+1|$,

Terakhir, kita dapat menggabungkan hasil integral dari masing-masing fraksi untuk mendapatkan hasil akhir integral.

9.3 Integral Tentu (Definite Integral)

9.3.1 Konsep dan Notasi Integral Tentu

Integral tentu adalah operasi matematika yang menghitung luas di bawah kurva suatu fungsi di antara dua titik tertentu pada sumbu x . Konsep integral tentu sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti matematika, fisika, ekonomi, dan lainnya. Notasi yang umum digunakan untuk integral tentu adalah:

$$\int_a^b f(x) dx$$

disini, $f(x)$ adalah fungsi yang diintegrasikan, a adalah batas bawah, b adalah batas atas, dan dx menunjukkan variabel integrasi, yaitu variabel terhadap fungsi $f(x)$.

Integrasi tentu dapat diinterpretasikan sebagai area di bawah kurva fungsi $f(x)$ diantara titik $x = a$ dan $x = b$. Ketika kita memahami integral tentu, kita bisa menganggapnya sebagai penjumlahan tak terhingga dari elemen-elemen luas yang sangat kecil di bawah kurva fungsi.

Ada beberapa konsep penting yang terkait dengan integral tentu :

- 1) **Teorema Dasar Kalkulus:** Menyatakan hubungan antara diferensiasi dan integrasi. Dinyatakan dalam dua bagian: Teorema Dasar Kalkulus Bagian Pertama (TDK I) dan Teorema Dasar Kalkulus Bagian Kedua (TDK II).

- 2) **Fungsi Integrand:** Merupakan fungsi yang sedang diintegrasikan, yaitu $f(x)$ dalam notasi integral $\int_a^b f(x) dx$,
- 3) **Batas Integrasi:** a dan b adalah batas bawah dan batas atas integral. Mereka menentukan interval di mana integrasi dilakukan.
- 4) **Variabel Integrasi:** dx menunjukkan variabel terhadap fungsi yang diintegrasikan. Ini menunjukkan bahwa kita mengintegrasikan fungsi terhadap variabel x .
- 5) **Area di Bawah Kurva:** Integral tentu dapat diinterpretasikan sebagai luas di bawah kurva fungsi $f(x)$ di antara titik $x = a$ dan $x = b$.

9.3.2 Interpretasi Geometris Integral Tentu

Interpretasi geometris integral tentu adalah pemahaman tentang makna geometris dari hasil integral tentu dalam konteks mengukur luas daerah di bawah kurva fungsi di antara dua titik tertentu pada sumbu x ,

Secara geometris, integral tentu dapat diinterpretasikan sebagai proses menghitung luas di bawah kurva fungsi $f(x)$ di antara dua titik $x = a$ dan $x = b$ pada sumbu x . Proses ini dapat dimodelkan dengan cara membagi daerah di bawah kurva menjadi sejumlah kecil segmen yang sangat kecil dan kemudian menjumlahkan luas segmen-segmen tersebut. Saat jumlah segmen mendekati tak terhingga, hasilnya akan mendekati luas daerah yang diinginkan.

Mari kita ambil contoh $f(x) = x^2$ dan kita ingin menghitung luas daerah dibawah kurva $f(x)$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$.

Dalam hal ini, kita ingin mengevaluasi integral tentu berikut:

$$\int_0^2 x^2 dx$$

Interpretasi geometris dari integral ini adalah bahwa kita ingin menemukan luas daerah dibawah kurva $f(x) = x^2$ diantara $x = 0$ dan $x = 2$ pada sumbu x .

Kita dapat memvisualisasikan ini dengan menggambar grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $x = [0,2]$ dan menghitung luas daerah di bawah kurva tersebut.

Pada interval $x = [0,2]$, kurva $y = x^2$ terletak di atas sumbu x , membentuk segmen dari parabola yang terbuka ke atas.

Dengan menggunakan integral tentu, kita dapat menghitung luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ pada interval $x = [0,2]$. Hasilnya adalah:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{1}{3}x^3 \right|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}$$

Jadi, interpretasi geometris dari hasil integral tentu ini adalah bahwa luas daerah di bawah kurva $f(x) = x^2$ di antara $x = 0$ dan $x = 2$ adalah $\frac{8}{3}$ satuan luas.

9.3.3 Teorema Fundamental Kalkulus

Teorema Fundamental Kalkulus adalah salah satu konsep kunci dalam kalkulus yang menghubungkan integral tentu dengan turunan. Secara khusus, ada dua bagian utama dari teorema ini:

1) Teorema Fundamental Kalkulus Bagian Pertama (TFK I):

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan $F(x)$ adalah fungsi antiturunan dari $f(x)$ pada interval tersebut, maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ini menyatakan bahwa integral tentu dari $f(x)$ di antara dua titik a dan b sama dengan perbedaan antara nilai antiturunan $F(x)$ di titik b dan a .

2) Teoreman Fundamental Kalkulus Bagian Kedua (TFK II):

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$ dan $F(x)$ adalah fungsi antiturunan dari $f(x)$ pada interval tersebut, maka turunan dari $F(x)$ adalah $f(x)$, yaitu:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Ini menyatakan bahwa turunan dari integral tentu dari $f(t)$ di atas interval $[a, x]$ adalah fungsi $f(x)$.

9.4 Aplikasi Integral

9.4.1 Menghitung Volume Benda Putar

Untuk menghitung volume benda putar menggunakan metode cakram, cincin, atau kerucut, kita perlu memahami bentuk benda yang akan diputar dan memilih metode yang sesuai untuk menghitung volumenya.

1) Metode Cakram:

Metode cakram digunakan ketika benda yang diputar memiliki bentuk diskrit seperti lingkaran atau setumpuk lingkaran. Untuk menghitung volumenya, kita menggunakan integral tentu.

Misalkan kita memiliki fungsi $f(x)$ yang mendeskripsikan tinggi benda pada interval $[a, b]$ (dimana $f(x)$ positif untuk $a \leq x \leq b$). Volume benda putar dapat dihitung dengan rumus:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Contoh Soal:

Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^2$ dan $x = 0$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x dengan menggunakan metode cakram.

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi $f(x)$ yang akan digunakan untuk menghitung volume dengan metode cakram. Dalam kasus ini, fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang mendeskripsikan tinggi benda pada setiap titik x , yaitu $f(x) = x^2$.

Kemudian, kita menggunakan rumus volume benda putar dengan metode cakram:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Dalam kasus ini, $a = 0$ dan $b = 2$, karena kita memutar kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$. Substitusi $f(x) = x^2$ ke dalam rumus volume:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4) dx$$

Selanjutnya, kita mengintegrasikan x^4 terhadap x dari 0 hingga 2:

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{1}{5} \cdot 0^5 \right)$$

$$V = \pi \cdot \frac{32}{5}$$

$$V = \frac{32}{5} \pi$$

Jadi, volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x menggunakan metode cakram adalah $\frac{32}{5}\pi$ atau sekitar 20.106 satuan kubik.

2) Metode Cincin

Metode cincin digunakan ketika benda yang diputar terbentuk dari pengurangan atau penambahan dua bentuk seperti cincin. Biasanya, metode ini digunakan ketika benda tersebut memiliki celah atau bagian tengah yang kosong.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua fungsi yang mendeskripsikan tinggi benda pada interval $[a, b]$ (dimana $f(x) \geq g(x)$ untuk $a \leq x \leq b$), maka volume benda putar dapat dihitung dengan rumus:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

Contoh Soal:

Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^3$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$ menggunakan metode cincin.

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi $f(x)$ yang akan digunakan untuk menghitung volume dengan metode cincin. Dalam kasus ini, fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang mendeskripsikan tinggi benda pada setiap titik x , yaitu $f(x) = x^3$.

Kemudian, kita menggunakan rumus volume benda putar dengan metode cincin:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

Dalam kasus ini, $a = 0$ dan $b = 2$, karena kita memutar kurva $y = x^3$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$, Substitusi $f(x) = x^3$ ke dalam rumus volume:

$$V = \pi \int_0^2 [(x^3)^2 - (0)^2] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^6 dx$$

Selanjutnya, kita mengintegrasikan x^6 terhadap x dari 0 hingga 2:

$$V = \pi \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{7} \cdot 2^7 - \frac{1}{7} \cdot 0^7 \right)$$

$$V = \pi \cdot \frac{128}{7}$$

$$V = \frac{128}{7} \pi$$

Jadi, volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = x^3$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x menggunakan metode cakram adalah $\frac{128}{7}\pi$ atau sekitar 18.29 satuan kubik.

3) Metode Kerucut

Metode kerucut digunakan ketika benda yang diputar memiliki bentuk kerucut atau setumpuk kerucut. Dalam hal ini, kita membagi benda menjadi elemen-elemen yang membentuk kerucut dan menghitung volumenya.

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang mendeskripsikan tinggi benda pada interval $[a, b]$, maka volume benda putar dapat dihitung dengan rumus:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Contoh Soal:

Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$.

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi $f(x)$ yang akan digunakan untuk menghitung volume dengan metode kerucut. Dalam kasus ini, fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang mendeskripsikan tinggi benda pada setiap titik x , yaitu $f(x) = \sqrt{x}$.

Kemudian, kita menggunakan rumus volume benda putar dengan menggunakan metode kerucut:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Dalam kasus ini, $a = 0$ dan $b = 4$, karena kita memutar kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$. Substitusi $f(x) = \sqrt{x}$ ke dalam rumus volume:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 x dx$$

Selanjutnya, kita mengintegrasikan x terhadap x dari 0 hingga 4:

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right)$$

$$V = 8\pi$$

Jadi, volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 4$ sekitar sumbu x menggunakan metode kerucut adalah 8π atau sekitar 25.13 satuan kubik.

Latihan Soal

1. Hitunglah integral tak tentu dari fungsi
 - a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.
 - b) $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.
 - c) $h(x) = \frac{2x^3 + 5x^2}{x}$.
2. Hitunglah integral tentu dari fungsi
 - a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ pada interval $[0, 2]$,

- b) $g(x) = \sin(x)$ pada interval $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pada interval $[1, 9]$,
3. Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = e^x$ dari $x = 0$ hingga $x = 2$ sekitar sumbu x menggunakan metode cakram.
 4. Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \sin(x)$ dari $x = 0$ hingga $x = \frac{\pi}{2}$ sekitar sumbu x menggunakan metode cincin.
 5. Hitunglah volume benda yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = \frac{1}{x^2}$ dari $x = 1$ hingga $x = 3$ sekitar sumbu x menggunakan metode kerucut.

DAFTAR PUSTAKA

- Erfan Yudianto. 2020. *Modul Integral*. Jember: Universitas Jember.
- Febi Sanjaya. 2017. *Kalkulus Integral*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

BAB 10

PELUANG

Oleh Siska Andriani

10.1 Pendahuluan

Haura dan Idzar sedang bermain ular tangga, dalam permainan ular tangga pelemparan dadu sebagai alat untuk menentukan berapa banyak langkah yang akan pemain jalankan. Idzar telah melemparkan dadu sebagai dasar perjalanan dari satu petak ke petak lainnya. Idzar ingin berada di petak 4 karena ada tangga yang naik ke petak 14. Jika saat ini Idzar berada di petak 2, berapa peluang Idzar bisa maju ke petak 4? Untuk menuju petak 4, Idzar harus berjalan 2 langkah. Artinya, dadu harus menunjukkan angka 2. Dadu memiliki enam sisi, sehingga peluang munculnya angka 2 adalah $\frac{1}{6}$. Mata dadu yang muncul dari hasil pelemparan tersebut dikatakan sebuah *peluang*.



Gambar 10. 1 Permainan Ular Tangga

(sumber : <https://www.anakbisa.com/kb/ular-tangga/>)

Peluang memenangkan suatu permainan pada zaman dahulu diterapkan dalam perjudian. Pascal, James Bernouli dan Fermat merupakan ilmuwan matematika yang diminta para penjudi untuk menghasilkan siasat memperbesar kemenangan dalam perjudian. Koin, dadu maupun kartu sangat berkaitan dengan konsep peluang.

Peluang merupakan bagian matematika yang membahas tentang ukuran ketidakpastian terjadinya suatu peristiwa yang ada dalam kehidupan (Smith, 1991:3). Selain dalam bidang matematika, peluang juga berkaitan dengan bidang kesehatan, ekonomi, psikologi maupun statistika. Sebelum membahas mengenai rumus peluang kita terlebih dahulu memahami ruang sampel, titik sampel dan kejadian.

10.2 Ruang Sampel

Saat melakukan suatu percobaan pelemparan dadu, kemungkinan keluarnya mata dadu dinotasikan dengan $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Kemungkinan semua hasil yang terjadi dari percobaan tersebut dinamakan ruang sampel. Penulisan ruang sampel dinotasikan dengan huruf kapital "S", banyaknya elemen dari ruang sampel dinotasikan dengan $n(S)$ (Herrhyanto,2014). Setiap anggota dari ruang sampel dinamakan titik-titik sampel.

Himpunan bagian dari ruang sampel disebut dengan Kejadian. Kejadian dengan satu titik sampel disebut kejadian sederhana, gabungan dari kejadian -kejadian sederhana dinamakan kejadian bersusun. Kejadian terjadi jika hasil suatu percobaan termasuk dalam ruang sampel.

Contoh:

Misalkan S adalah kejadian dalam pelemparan satu dadu bersisi enam, diperoleh ruang sampel kejadian $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Titik sampel dari kejadian S adalah 1,2,3,4,5 dan 6. Kejadian sederhananya yakni $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, atau $\{6\}$.

Ruang sampel dibagi menjadi dua jenis, yakni ruang sampel diskrit dan ruang sampel kontinu

10.2.1 Ruang Sampel Diskrit dan Kontinu

Ruang sampel diskrit adalah ruang sampel yang mempunyai banyak anggotanya berhingga atau tidak berhingga tetapi dapat dihitung. Sedangkan ruang sampel kontinu adalah ruang sampel yang anggotanya merupakan interval pada garis bilangan real. Sebagai contoh dalam pelemparan dadu, ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ merupakan ruang sampel diskrit. Perusahaan lampu "TERANG" memproduksi bola lampu baru, akan dilihat masa hidup bola lampu (jam). Karena masa hidup bola lampu bernilai bilangan real positif, maka ruang sampelnya adalah $S = \{t: t > 0\}$.

10.2.2 Peristiwa (Kejadian)

Peristiwa(kejadian) adalah sebuah himpunan bagian dari ruang sampel S (Walpole dkk.,2012). Setiap himpunan bagian dari ruang sampel S merupakan sebuah kejadian. Notasi kejadian dinotasikan dengan huruf kapital misalkan X, Y, Z .

Dalam sebuah kejadian dari ruang sampel S , maka ada tiga kemungkinan yang muncul, yakni:

- S merupakan suatu kejadian
- $\emptyset$ merupakan suatu kejadian
- Beberapa hasil dari ruang sampel S merupakan suatu kejadian.

Sebuah kejadian dikatakan telah terjadi ketika ada anggota dari ruang kejadiannya merupakan hasil percobaan/eksperimen.

Contoh:

Ruang sampel dalam pelemparan sebuah dadu adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sebutkan enam kejadian dilengkapi dengan kejadiannya.

Penyelesaian:

- a. Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu kurang dari 5.

Ruang kejadian dari A adalah $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- b. Misalkan B adalah munculnya mata dadu yang habis dibagi 3.

Ruang kejadian dari B adalah $B = \{3, 6\}$

- c. Misalkan C adalah munculnya mata dadu terbesar.

Ruang kejadian dari C adalah $C = \{6\}$

- d. Misalkan D adalah munculnya mata dadu yang merupakan bilangan genap.

Ruang kejadian dari D adalah $D = \{2, 4, 6\}$

- e. Misalkan E adalah munculnya mata dadu yang kurang dari 9.

Ruang kejadian dari E adalah $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- f. Misalkan F adalah munculnya mata dadu yang bernilai ganjil.

Ruang kejadian dari F adalah $F = \{1, 3, 5\}$.

Apabila kita mengambil sebuah anggota kejadian, misalnya 5, maka kejadian E dan F telah terjadi. Hal ini karena $5 \in E$ dan $5 \in F$. Lain halnya dengan kejadian A, B, C, dan D tidak terjadi, karena $5 \notin A$, $5 \notin B$, $5 \notin C$, dan $5 \notin D$

Jika A dan B merupakan dua buah kejadian, maka :

1. $A \cup B$, merupakan kejadian dimana kejadian A atau B terjadi dan juga keduanya terjadi
2. $A \cap B$, merupakan peristiwa yang terjadi, jika A terjadi dan B terjadi.
3. A^c , atau komplemen dari A, adalah kejadian yang terjadi jika A tidak terjadi.

Operasi himpunan terhadap kejadian akan diperjelas seperti dalam contoh berikut:

Tiga koin dilemparkan secara bersamaan, G adalah sisi gambar dan A adalah sisi angka. Ruang sampel yang terbentuk adalah

$$S = \{GGG \ GGA \ GAG \ AGG \ GAA \ AGA \ AAG \ AAA\}$$

Didefinisikan beberapa kejadian yang terjadi, yaitu :

K : kejadian banyaknya gambar muncul melebihi banyak angka

L : kejadian banyaknya gambar muncul dua kali

M: kejadian munculnya angka minimal dua kali

N : kejadian munculnya koin kedua bukan angka

Contoh:

Tentukan kejadian-kejadian disertai dengan ruang kejadiannya pada kejadian-kejadian berikut:

$$1. E = L \cap N$$

$$2. F = M^c$$

$$3. I = L^c \cup N$$

Penyelesaian:

Kita tentukan terlebih dahulu ruang kejadiannya

Ruang kejadian dari K adalah

$$K = \{GAG \ GGA \ AGG \ GGG\}$$

Ruang kejadian dari L adalah

$$L = \{GGA \ GAG \ AGG\}$$

Ruang kejadian dari M adalah

$$M = \{GAA \ AAG \ AGA \ AAA\}$$

Ruang kejadian dari N adalah

$$N = \{GGG \ AGG \ AGA \ GGA\}$$

Selanjutnya mengidentifikasi keadian dengan ruang kejadiannya

$$1. E = L \cap N$$

Adalah kejadian banyaknya gambar mundul dua kali dan koin kedua bukan muncul angka.

Ruang kejadian E adalah:

$$E = \{AGG \ GGA\}$$

$$2. F = M^c$$

Adalah kejadian banyaknya angka yang muncul kurang dari dua kali.

Ruang kejadian F adalah:

$$F = \{AGG \ AGA \ GGA \ GGG\}$$

$$3. I = L^c \cup N$$

Adalah kejadian banyaknya gambar muncul bukan dua kali atau koin kedua muncul bukan angka.

Ruang kejadian I adalah:

$$I = \{AAA \ AAG \ AGA \ GAA \ GGG \ AGG \ GGA\}$$

Dua kejadian A dan B dikatakan **saling asing (disjoin)**, apabila $A \cap B = \emptyset$, dengan kata lain kejadian A dan B tidak memiliki unsur yang sama (Walpole. 2012)

Contoh : Misalkan $A = \{a \ i \ u \ e \ o\}$ dan $B = \{p \ q \ r\}$, Jelas $A \cap B = \emptyset$, kejadian A dan B tidak memiliki unsur elemen yang sama, sehingga A disjoin B.

10.3 Konsep Peluang

Besarnya peluang suatu kejadian terjadi atau tidak ditentukan juga dari jumlah titik sampel yang dimilikinya. Kejadian selalu memiliki besar peluang antara 0 dan 1. Jika kejadian terjadi maka besar peluang nya adalah 1, akan tetapi jika suatu kejadian pasti tidak terjadi maka besaran peluangnya adalah nol.sehingga dapat dikatakan peluang adalah ukuran yang digunakan untuk mengetahui suatu kejadian terjadi atau tidak terjadi.(Herrhyanto,2014)

S merupakan ruang sampel percobaan dan A adalah kumpulan kejadian yang dapat dibentuk dari S . Peluang kejadian A adalah jumlah peluang dari semua titik sampel dari A , penjumlahan ini disebut besar peluang kejadian A dinotasikan dengan $P(A)$ yang memenuhi sifat

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\emptyset) = 0 \text{ dan } P(S) = 1$$

Jika $A_1, A_2, \dots, A_m$ adalah m buah peristiwa yang saling lepas dalam A ($A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m$) maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Peluang merupakan harga perbandingan jumlah kejadian A yang mungkin dapat terjadi terhadap S (jumlah keseluruhan kejadian yang mungkin terjadi dalam sebuah peristiwa). Formula besarnya peluang suatu kejadian A yaitu :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dengan $P(A)$: peluang kejadian A

$n(A)$: jumlah kejadian A

$n(S)$: jumlah seluruh kejadian

Dalil tentang besarnya peluang sebuah kejadian $P(\cdot)$, jika S adalah ruang sampel percobaan, dan A adalah sekumpulan kejadian yang dapat dibentuk dari S .

Dalil 1 : Peluang peristiwa himpunan kosong

Jika $\emptyset$ menyatakan kejadian himpunan kosong, maka

$$P(\emptyset) = 0$$

Bukti :

Dua kejadian yang saling lepas S dan $\emptyset$, sehingga $S \cup \emptyset = S$.

Jelas $P(S \cup \emptyset) = P(S)$

$$\Leftrightarrow P(S) + P(\emptyset) = P(S)$$

$$\Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$$

Terbukti.

Dalil 2 : Peluang komplemen peristiwa

Jika A adalah kejadian dalam A, maka: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Bukti :

A dan A^c adalah kejadian saling lepas, sehingga

$$A \cup A^c = S$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup A^c) = P(S)$$

Karena A dan A^c dua kejadian saling lepas, maka

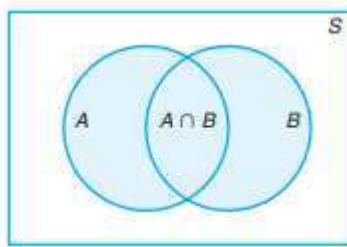
$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

Dalil 3. Peluang dua kejadian inklusif

Jika A dan B dua kejadian, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Gambar 10. 2 Diagram Venn Kejadian $A \cap B$ dan $A \cup B$

sumber : Walpole (2014)

Bukti :

Dari gambar diagram $P(A \cup B)$ adalah jumlah peluang dari titik sampel di $(A \cup B)$. Sedangkan $P(A) + P(B)$ adalah peluang kejadian A ditambahkan dengan peluang kejadian B, maknanya kita menambahkan $P(A \cap B)$ sebanyak dua kali. Sehingga haruslah dikurangi dengan $P(A \cap B)$ dan didapatkan besaran peluang $P(A \cup B)$.

Jika kejadian A dan B saling asing maka $A \cap B = \emptyset$, sehingga $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, Hal ini berakibat

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Misalkan terdapat tiga kejadian A,B, dan C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

10.4 Peluang Bersyarat

Merupakan peluang dengan suatu syarat kejadian lain. jika S ruang sampel, A dan B adalah dua kejadian yang terbentuk dari S, maka peluang bersyarat dari B terhadap A didefinisikan sebagai berikut:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dengan $0 < P(A) < 1$,

Makna dari $P(B / A)$ adalah peluang kejadian B setelah kejadian A terjadi. Atau dapat diartikan juga peluang kejadian A dan kejadian B terjadi sama dengan peluang kejadian A dikalikan dengan peluang kejadian B jika kejadian A terjadi. Hal tersebut dapat dinotasikan

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

10.4.1 Perhitungan Peluang Bersyarat

Misalkan S ruang sampel, S memiliki anggota berhingga dengan kejadian-kejadiannya A dan B , maka :

$$P(A|B) = \frac{\text{banyak anggota dalam } A \cap B}{\text{banyak anggota dalam } B}$$

Atau

$$P(A|B) = \frac{\text{banyak cara } A \text{ dan } B \text{ terjadi}}{\text{banyak cara } B \text{ dapat terjadi}}$$

10.4.2 Perkalian Peluang Bersyarat

Jika S ruang sampel dengan A dan B sebagai kejadian yang terbentuk dari S , maka :

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Formula tersebut dapat dikembangkan untuk beberapa kejadian.

Jika A_1, A_2, A_3 merupakan tiga kejadian, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Jika A_1, A_2, A_3, A_4 merupakan empat kejadian, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Jika $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_m$ merupakan m buah kejadian, maka

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_m) \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \end{aligned}$$

10.4.3 Peluang Dua Kejadian Saling Bebas

Jika A dan B adalah dua kejadian dikatakan saling bebas jika dan hanya jika :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sifat-sifat dua kejadian bebas yaitu jika kejadian A dan B saling bebas, maka :

- Dua kejadian A dan B^c juga saling bebas
- Dua kejadian A^c dan B juga saling bebas
- Dua kejadian A^c dan B juga saling bebas

10.4.4 Peluang Tiga Kejadian Saling Bebas

Jika X, Y dan Z merupakan kejadian kejadian, dikatakan KEJADIAN saling bebas, jika dan hanya jika memenuhi persyaratan sebagai berikut:

- Kejadian -kejadian yang berpasangan bebas, yakni:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

$$P(X \cap Z) = P(X) \cdot P(Z)$$

$$P(Y \cap Z) = P(Y) \cdot P(Z)$$

- $P(X \cap Y \cap Z) = P(X) \cdot P(Y) \cdot P(Z)$

10.5 Dalil Bayes

Peluang bersyarat Bayes dihitung berdasarkan beberapa kejadian yang merupakan partisi dari ruang sampel.

Partisi dari ruang sampel S dengan $B_1 B_2 B_3 \cdots B_7$ kejadian kejadian nya, jika memenuhi :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk semua $i \neq j$,

b. $\bigcup_{i=1}^7 B_i = S$

c. $P(B_i) > 0$ untuk semua $i = 1\ 2\ 3 \dots 7$

Jika kejadian $B_1\ B_2\ B_3 \dots B_7$ merupakan partisi dari ruang sampel S , sehingga peluang dari kejadian A adalah

$$P(A) = \sum_{i=1}^7 P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Jika kejadian $B_1\ B_2\ B_3 \dots B_k$ adalah bagian dari ruang sampel S , dengan $P(B_i) > 0$ untuk $i = 1\ 2\ 3 \dots k$, sedemikian hingga $P(A)>0$ berlaku:

$$P(Br|A) = \frac{P(Br) \cdot P(A|Br)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Herrhyanto, Nar, dkk. 2014. Pengantar Stastitika Matematis. Bandung: Yrama Widya.
- Smith, Gary. (1991). Statistical Reasoning (3rd Edition). Allyn and Bacon, A Division of Simon and Schuster Inc: 160 Gould Street, Needham Height, Massachusetts 02194.
- Walpole dkk., 2012. Probability Statistics for Engineers Scientists (9th Edition). United State of America : Pearson Education.

BAB 11

LOGIKA MATEMATIKA

Oleh Novian Riskiana Dewi

11.1 Pendahuluan

Permasalahan dalam sehari-hari tidak bisa kita pisahkan dengan prinsip-prinsip dasar matematika. Salah satu contohnya yang menggunakan prinsip dasar matematika yaitu prinsip logika matematika dalam merencanakan anggaran rumah tangga, menemukan rute tercepat untuk mencapai tujuan, menghitung harga diskon yang kita dapatkan dalam sebuah toko, perbandingan bahan kue yang digunakan, dan masih banyak permasalahan lainnya yang menggunakan prinsip logika matematika.



Gambar 11. 1 Resep Kue Menggunakan Perbandingan Matematika

(Sumber: <https://www.haibunda.com/moms-life/20200701132214-76-1\9264/viral-resep-bolu-unik-hitung-komposisi-bahan-pakai-rumus-matematika>)

Saat membuat kue kita juga menggunakan prinsip logika matematika, perbandingan bahan kue yang kita gunakan untuk membuat satu resep kue, dengan 2 resep kue harus sesuai dengan perbandingannya agar mendapatkan hasil kue yang sempurna.

Misalkan untuk membuat satu resep kue brownies kita membutuhkan 2 butir telur, 150 gram coklat, 150 gram tepung, bahan ini akan menghasilkan untuk loyang berukuran $20 \times 10 \text{ cm}$, Jika kita akan membuat brownies dengan loyang berukuran $20 \times 20 \text{ cm}$ maka kita membutuhkan bahan dua kali dari resep aslinya, yaitu 4 butir telur, 300 gram coklat, 300 gram tepung. Perbandingan ini harus sesuai agar hasil yang kita dapatkan kue brownies dengan rasa dan tekstur yang sama dari resep aslinya.

11.2 Pengertian Logika

Logika matematika adalah cabang matematika yang mempelajari aturan-aturan formal untuk penalaran dan inferensi dalam konteks struktur matematika. Ini mencakup studi tentang bahasa formal yang digunakan untuk menyatakan pernyataan matematika, serta teknik-teknik untuk membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran dari pernyataan tersebut.

Dengan menggunakan simbol-simbol dan aturan-aturan yang tepat, logika matematika memungkinkan kita untuk menganalisis dan memahami dasar-dasar penalaran dalam matematika. Ini membantu dalam menyusun argumen-argumen yang jelas dan terbukti, serta dalam mengidentifikasi dan memecahkan berbagai masalah matematika.

Selain itu, logika matematika juga membahas konsep-konsep yang mendasari matematika, seperti himpunan, relasi, fungsi, dan struktur aljabar. Ini membantu dalam memahami

dasar-dasar matematika modern dan aplikasinya dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, kecerdasan buatan, dan ilmu pengetahuan lainnya.

Dengan demikian, logika matematika merupakan landasan penting bagi pengembangan teori-teori matematika dan aplikasinya dalam pemecahan masalah dunia nyata.

11.3 Pernyataan dan Bukan Pertanyaan

Pada logika matematika terdapat suatu pernyataan dan bukan pernyataan, pernyataan adalah suatu kalimat yang dapat dianggap benar atau salah. Sebaliknya, bukan pernyataan adalah suatu kalimat yang tidak dapat dianggap benar atau salah karena kurangnya ketegasan atau kejelasan. Contoh dari bukan pernyataan termasuk perintah, pertanyaan, atau ungkapan emosional. Berikut adalah beberapa contoh pernyataan dan bukan pernyataan dalam logika matematika:

Contoh 1 Pernyataan:

1. " $2 + 1 = 3$ "
2. "Persegi panjang memiliki empat sisi"
3. "Ayam adalah hewan berkaki dua"

Contoh 2 Bukan Pernyataan:

1. "Dimanakah alamat rumahmu?"
2. "Tolong buang sampah ini di tempat sampah!"
3. "Saya suka warna merah"

Bukan pernyataan tidak dapat dinilai sebagai benar atau salah karena mereka tidak menyatakan fakta yang dapat diuji kebenarannya. Mereka mungkin merupakan perintah, pertanyaan, atau ekspresi emosional yang tidak dapat dinilai kebenarannya secara objektif.

Dalam logika matematika, penting untuk membedakan antara pernyataan dan bukan pernyataan karena hanya pernyataan yang dapat digunakan dalam penalaran logis dan pembuktian matematis. Bukan pernyataan, meskipun mungkin penting dalam konteks lain, tidak memiliki nilai kebenaran yang dapat diuji.

11.4 Negasi (Ingkaran) Suatu Pernyataan

Negasi suatu pernyataan adalah proses pembuatan pernyataan baru yang memiliki nilai kebenaran yang berlawanan dengan pernyataan asli tersebut. Dalam konteks logika matematika, negasi sering kali dilambangkan dengan simbol atau kata-kata tertentu yang menunjukkan pembalikan kebenaran pernyataan.

Secara umum, jika pernyataan asli adalah P , maka negasinya (yang dilambangkan dengan $\neg P$ atau "bukan P ") adalah pernyataan yang benar jika P salah, dan sebaliknya. Artinya, jika P benar, negasi dari P adalah salah, dan jika P salah, negasi dari P adalah benar.

Definisi dari negasi suatu pernyataan dapat dinyatakan dalam suatu tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 11. 1 Tabel Nilai Kebenaran Negasi Suatu Pernyataan

P	$\neg P$	$\neg (\neg P)$
B	S	B
S	B	S

Contoh 3:

- P : Hari ini turun hujan.
- $\neg P$: Hari ini tidak turun hujan.

Contoh 4:

Q : Ibu tidak membeli sayuran di pasar.

$\neg Q$: Ibu membeli sayuran di pasar.

Dengan kata lain, negasi suatu pernyataan adalah cara untuk membalikkan kebenaran dari pernyataan tersebut, dan ini sering digunakan dalam penalaran logis dan pembuktian matematis.

11.5 Pernyataan Majemuk

Dalam logika matematika, kita jumpai beberapa operasi untuk menggabungkan beberapa macam pernyataan untuk mendapatkan pernyataan baru yang dinamakan pernyataan majemuk dengan kata “tidak”, “dan”, “atau”, “jika ... maka ...” dan seterusnya.

Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan kata sambung “dan”, dinotasikan dengan “ $\wedge$ ”.

Tabel 11. 2 Nilai Kebenaran Pada Konjungsi

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Disjungsi

Disjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggabungkan dua pernyataan tunggal dengan kata sambung “atau”, dinotasikan dengan “ $\vee$ ”.

Tabel 11. 3 Nilai Kebenaran Pada Disjungsi

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Implikasi

Implikasi adalah suatu pernyataan majemuk dari pernyataan P dan Q dinotasikan $P \rightarrow Q$ (jika P , maka Q).

Tabel 11. 4 Nilai Kebenaran Pada Implikasi

P	Q	$P \rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Biimplikasi

Biimplikasi adalah suatu pernyataan majemuk dari pernyataan P dan Q dinotasikan $P \leftrightarrow Q$ (P jika dan hanya jika Q).

Tabel 11. 5 Nilai Kebenaran Pada Biimplikasi

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

11.6 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Berdasarkan implikasi $P \rightarrow Q$ dapat dinyatakan pernyataan-pernyataan baru yaitu konvers, invers, dan kontraposisi.

Tabel 11. 6 Bentuk Pernyataan Baru

Implikasi	$P \rightarrow Q$
Konvers	$Q \rightarrow P$
Invers	$\neg P \rightarrow \neg Q$
Kontraposisi	$\neg Q \rightarrow \neg P$

Contoh 5:

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

“Jika Alfian rajin belajar, maka Ia mendapatkan nilai bagus”.

Jawab:

Konvers : Jika Alfian mendapatkan nilai bagus, maka Ia rajin belajar.

Invers : Jika Alfian tidak rajin belajar, maka Ia tidak mendapatkan nilai bagus.

Kontraposisi : Jika Alfian tidak mendapatkan nilai bagus, maka Ia tidak rajin belajar.

Tabel 11. 7 Nilai Kebenaran Konvers, Invers, dan Kontraposisi

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$Q \rightarrow P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

11.7 Pembuktian Matematika

Pada bagian ini akan dijelaskan cara pembuktian secara langsung dan tidak langsung. Dalam pembuktian secara langsung, informasi yang sudah diketahui tentang suatu teorema diuraikan secara langsung menggunakan teknik-teknik khusus sehingga mencapai hasil kesimpulan yang diinginkan.

11.7.1 Pembuktian Langsung

Bukti langsung : Implikasi $P \Rightarrow Q$ dapat dibuktikan dengan memperlihatkan bahwa jika P benar maka Q benar juga.

Contoh 6:

Diketahui $a, b \in \mathbb{N}$. dengan a dan b merupakan bilangan ganjil. Buktikan bahwa $(a + b)$ genap.

Bukti:

Bukti langsung P : a bilangan ganjil dan b bilangan ganjil

Q : $(a + b)$ bilangan genap

Sehingga $P \Rightarrow Q$

Karena a ganjil, maka dapat dinyatakan $a = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$,

Karena b ganjil, maka dapat dinyatakan $b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$,

Jika dijumlahkan maka diperoleh:

$$\begin{aligned}(a + b) &= (2m + 1) + (2n + 1) \\ \square &= 2m + 2n + 2 \\ \square &= 2(m + n + 1)\end{aligned}$$

Misalkan $(m + n + 1) = c, c \in \mathbb{N}$, sehingga $a + b = 2c$ (Bilangan genap). Jadi terbukti benar.

11.7.2 Pembuktian Tak Langsung

Pada metode pembuktian tak langsung informasi yang ada tidak langsung digunakan untuk membuktikan. Terdapat 2 macam pembuktian tak langsung, yaitu kontradiksi dan kontraposisi.

Kontradiksi: Membuktikan $P \Rightarrow Q$ benar, dengan cara menunjukkan bahwa $P \Rightarrow \neg Q$ sehingga akan terjadi kontradiksi.

Contoh 7:

Buktikan bahwa $n^2 + n + 1$ adalah ganjil, $\forall n \in \mathbb{N}$,

Bukti:

Kita andaikan $n^2 + n + 1$ genap, maka dapat ditulis $n^2 + n + 1 = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, Ubah $n^2 + n + 1 = 2k$ menjadi $n^2 + n = 2k - 1$ atau dalam bentuk lain $n(n + 1) = 2k - 1$. Bentuk ini adalah suatu kontradiksi, karena $n(n + 1)$ hasil perkalian dari dua bilangan berurutan adalah genap, sedangkan $2k - 1$ adalah bentuk bilangan ganjil. Sehingga terjadi kontradiksi antara ruas kanan dan ruas kiri.

Artinya pengandaian kita bahwa $n^2 + n + 1$ genap adalah salah, yang benar adalah $n^2 + n + 1$ ganjil $\forall n \in \mathbb{N}$, [Terbukti benar]

Kontraposisi: Suatu pernyataan akan selalu ekuivalen (memiliki nilai kebenaran yang sama) dengan kontraposisinya. Dengan demikian, pembuktian kebenaran suatu pernyataan dapat pula dilakukan dengan membuktikan kebenaran kontraposisinya.

Jika kita akan membuktikan pernyataan $P \rightarrow Q$. kita dapat membuktikan kontraposisinya yaitu $\neg Q \rightarrow \neg P$.

Contoh 8:

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan riil x dan y , jika $x + y \geq 10$. maka $x \geq 5$ atau $y \geq 5$,

Bukti:

$$P : x + y \geq 10$$

$$Q : x \geq 5 \text{ atau } y \geq 5$$

Bentuk kontraposisi dari pernyataan yang ada di dalam soal adalah

$$\neg P : x + y < 10 \text{ dan } \neg Q : x < 5 \text{ dan } y < 5$$

Diketahui $x < 5$, artinya $x = 5 - a$. $a \in \mathbb{R}$, sedangkan

$y < 5$, artinya $y = 5 - b$. $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x + y &= (5 - a) + (5 - b) \\ \square &= 10 - a - b \\ \square &= 10 - (a + b) \\ \square &= 10 - c. c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Artinya $x + y < 10$,

Pernyataan jika $x < 5$ dan $y < 5$. maka $x + y < 10$ bernilai benar. Karena bentuk kontraposisinya bernilai benar, maka pernyataan jika $x + y \geq 10$. maka $x \geq 5$ atau $y \geq 5$ bernilai benar. Terbukti benar.

11.8 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah suatu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan matematika untuk semua bilangan bulat positif. Metode ini terdiri dari dua langkah utama:

1. **Langkah Dasar** : Pertama, pernyataan tersebut dibuktikan benar untuk kasus dasar, biasanya dengan menguji nilai terkecil dari himpunan bilangan bulat yang relevan. Diperiksa apakah untuk $n = 1$ berlaku.
2. **Langkah Induksi** : Selanjutnya, kita mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk suatu bilangan bulat n tertentu, dan kemudian membuktikan bahwa jika pernyataan tersebut benar. Diasumsikan berlaku untuk $n =$

k , kemudian akan ditunjukkan apakah untuk $n = k + 1$ juga berlaku.

Contoh 9 Pembuktian dengan induksi matematika:

Buktikan bahwa $\forall n \in \mathbb{N}$. berlaku rumus sebagai berikut:

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$,

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{➤ Ambil } n = 1 &\Rightarrow n = \frac{1}{2}n(n + 1) \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}(1)(1 + 1) \\ &\Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (Benar)} \end{aligned}$$

Sehingga $S(1)$ berlaku.

➤ Kita asumsikan benar $S(k)$ untuk $n = k$. maka

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1).$$

Kemudian akan ditunjukkan $S(k + 1)$ untuk $n = k + 1$ berlaku juga, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) \\ \square &= (k + 1)\left(\frac{1}{2}k + 1\right) \\ \square &= (k + 1)\frac{1}{2}(k + 2) \\ \square &= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Sehingga, rumus $S(k + 1)$ berlaku untuk $n = k + 1$, Karena berlaku untuk $n = k + 1$. maka disimpulkan rumus $S(n)$

yaitu $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ berlaku $\forall n \in \mathbb{N}$
terbukti.

DAFTAR PUSTAKA

- Negara, Hasan Sastra. 2014. Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD. Bandar Lampung : Aura Printing & Publishing.
- Siang, Jong Jek. 2006. Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer. Yogyakarta : Andi Yogyakarta.
- Sukirman, dkk. 2009. Matematika. Jakarta : Penerbit Universitas Terbuka.
- Warsito. 2022. Pengantar Matematika. Banten : Penerbit Universitas Terbuka.

BIODATA PENULIS



Zaitun, S.Si., M.Mat.

Dosen Program Studi Sains Data
Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Raha tanggal 22 Juni 1999. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sains Data Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Kota Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika. Penulis memiliki bidang konsentrasi keilmuan di bidang matematika komputasi dan matematika keteknikan.

BIODATA PENULIS



Irmayani, S.Si.,M.Si.

Dosen Program Studi Aktuaria
Jurusan Sains dan Teknologi

Penulis lahir di Anabanua tanggal 21 April 1988. Penulis adalah dosen pada Program Studi Aktuaria Jurusan Sains dan Teknologi, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin.

BIODATA PENULIS



Nurul Fuady Adhalia H., S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Matematika
Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di sebuah kota kecil bernama Palopo. Perempuan yang akrab disapa Nunung ini dilahirkan pada 10 Desember 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Anak kedua dari empat bersaudara ini menyelesaikan pendidikan S-1 pada Jurusan Matematika Universitas Negeri Makassar (UNM). Tahun 2015 melanjutkan S-2 pada Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) di Surabaya dengan bidang minat Matematika Komputasi. Sejak tahun 2017 penulis mengajar di beberapa kampus swasta hingga tahun 2022. Tahun 2022 dan 2023 berturut-turut tampil sebagai presenter pada Seminar Nasional Teknik Elektro dan Informatika (SNTEI) oleh Jurusan Elektro Politeknik Negeri Ujung Pandang (PNUP) dan *The 5th International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research (ICSMTR)* yang diselenggarakan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) UNM. Penulis hingga saat ini fokus menekuni bidang aljabar komputasi dan sains data.

BIODATA PENULIS



Hartina Husain, S.Si., M.Stat

Dosen Program Studi Sains Data

Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir pada 23 Mei 1996 di Samata, Sulawesi Selatan. Penulis meraih gelar sarjana dari Universitas Hasanuddin tahun 2017 pada jurusan Statistika. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Surabaya tepatnya di Institut Teknologi Sepuluh Nopember dengan jurusan yang sama. Saat ini, penulis aktif bekerja sebagai Dosen Sains Data di Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie. Penulis juga aktif sebagai tutor online (tuton) di Universitas Terbuka. Adapun topik penulisan artikel penulis terkait pemodelan statistika, regresi non parametrik, dan analisis meta.

BIODATA PENULIS



Yessy Yusnita, M.Si

Dosen Program Studi Teknik Sipil
Fakultas Teknik Institut Teknologi Padang

Penulis lahir di Dumai pada tanggal 24 Juni 1984. Penulis adalah Dosen PNS LLDIKTI Wilayah X DPK Institut Teknologi Padang pada Program Studi Teknik Sipil Fakultas Teknik, ITP. Menyelesaikan pendidikan S1 di Universitas Andalas tahun 2006 pada Jurusan Matematika dan menyelesaikan S2 di Universitas Indonesia pada Jurusan Matematika tahun 2010.

BIODATA PENULIS



Rifaldy Atlant Tungga, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Matematika
Jurusan Sains Institut Teknologi B.J. Habibie

Penulis lahir di Palu pada tanggal 20 Juli 1996. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Jurusan Sains Institut Teknologi B.J. Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Prodi Matematika dan melanjutkan S2 pada Prodi Matematika. Penulis menekuni bidang Menulis.

BIODATA PENULIS



A. Ika Putriani, S. Si., M. Si.

Dosen Program Studi Matematika

Jurusan Sains di Institut Teknologi Bachruddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Wajo tanggal 22 April 1997. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika, Institut Teknologi Bachruddin Jusuf Habibie. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin pada tahun 2019 dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin pada tahun 2022. Penulis menekuni bidang Matematika.

BIODATA PENULIS



Riyama Ambarwati, S.Si., M.Si

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Keguruan
Universitas Islam Negeri (UIN) Raden Intan Lampung

Penulis lahir di Bandar Lampung tanggal 02 September 1994. Menyelesaikan studi S-1 di Program Studi Matematika, Fakultas MIPA Universitas Lampung dan S-2 di Magister Matematika, Fakultas MIPA Universitas Lampung. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri (UIN) Raden Intan Lampung dari tahun 2020 hingga sekarang. Sebagai seorang dosen, penulis mengajar matakuliah Kalkulus Diferensial, Kalkulus Peubah Banyak, dan Matematika Diskrit. Penulis aktif menulis beberapa buku dan artikel di jurnal terakreditasi di Bidang Pendidikan Matematika mapun sains dan juga terlibat dalam penelitian di bidang Pendidikan di Universitas.

Penulis percaya bahwa sebagai seorang dosen, penulis bertanggung jawab untuk memberikan kontribusi yang positif pada dunia akademik dan masyarakat. Penulis berharap tulisan ini dapat memberikan pemahaman yang lebih baik tentang

konsep turunan fungsi aljabar dan membantu pembaca dalam memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan materi tersebut.

BIODATA PENULIS



Aprizal Resky, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Sains Data

Jurusan Sains Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Penulis lahir di Parepare tanggal 24 April 1998. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sains Data, Jurusan Sains, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie Parepare. Menyelesaikan pendidikan S1 dan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Hasanuddin. Selama menjadi mahasiswa, penulis juga aktif dalam kegiatan non-akademik seperti menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) FMIPA Unhas dan Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unhas.

BIODATA PENULIS



Siska Andriani, S.Si., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Keguruan
Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung

Penulis lahir di Metro, Provinsi Lampung. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada tahun 2011 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang (UNNES) dan melanjutkan pendidikan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika PPS UNNES lulus tahun 2013.

BIODATA PENULIS



Novian Riskiana Dewi, S.Pd., M.Si.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah dan Kependidikan
UIN Raden Intan Lampung

Penulis lahir di Banyuwangi, Jawa Timur. Menyelesaikan pendidikan S1 lulus tahun 2013 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Kependidikan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember dan melanjutkan S2 lulus tahun 2015 pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Saat ini penulis sebagai dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Kependidikan, UIN Raden Intan Lampung.