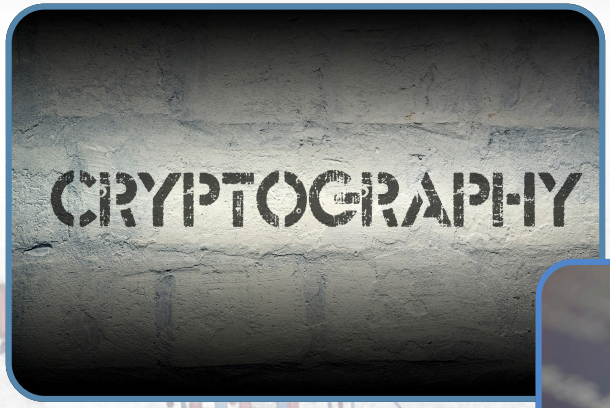
DISKRIT II

KONSEP LANJUT UNTUK PEMODELAN DAN ANALISIS



Penulis:

Juli Antasari Br Sinaga
Lilis
Adi Suarman Situmorang
Mik Salmina
Rektor Sianturi

ISBN 978-623-125-723-9

DISKRIT II :
KONSEP LANJUT UNTUK PEMODELAN DAN ANALISIS

Juli Antasari Br Sinaga
Lilis
Adi Suarman Situmorang
Mik Salmina
Rektor Sianturi

GETPRESS INDONESIA

DISKRIT II :
KONSEP LANJUT UNTUK PEMODELAN DAN ANALISIS

Penulis :
Juli Antasari Br Sinaga
Lilis
Adi Suarman Situmorang
Mik Salmina
Rektor Sianturi

ISBN : 978-623-125-723-9

Editor : Mila Sari, M.Si.
Desain Sampul dan Tata Letak : Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

PENERBIT GET PRESS INDONESIA
Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022
Jl. Palarik RT 01 RW 06 Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tangah Padang Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id
email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, April 2025

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya sehingga buku Diskrit II: Konsep Lanjut untuk Pemodelan dan Analisis ini dapat tersusun dengan baik. Buku ini disusun untuk memperdalam pemahaman mengenai konsep-konsep matematika diskrit lanjutan, yang memiliki peran penting dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, teknik, dan sains. Materi yang disajikan mencakup logika matematika lanjutan, teori graf dan jaringan, relasi dan fungsi, kombinatorika serta prinsip Pigeonhole, hingga konsep teori bilangan dan penerapannya dalam kriptografi. Dengan cakupan materi yang luas, buku ini diharapkan dapat menjadi sumber referensi bagi mahasiswa, akademisi, dan praktisi yang ingin mengembangkan wawasan dalam matematika diskrit.

Kami menyadari bahwa dalam penyusunan buku ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kami sangat terbuka terhadap kritik dan saran yang membangun demi perbaikan di masa mendatang. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat yang besar bagi para pembaca dalam memahami dan menerapkan konsep-konsep matematika diskrit dalam berbagai bidang studi dan penelitian. Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam proses penyusunan buku ini. Semoga ilmu yang disampaikan dalam buku ini dapat memberikan kontribusi positif bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi..

Padang, Maret 2025

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ..... **i**
DAFTAR ISI ..... **ii**
DAFTAR GAMBAR ..... **iv**
DAFTAR TABEL ..... **v**
BAB 1 LOGIKA MATEMATIKA LANJUT **1**
1.1 Pengantar Logika Predikat 1
1.1.1 Definisi Logika Predikat 2
1.1.2 Komponen Utama Logika Predikat 5
1.1.3 Perbedaan Logika Predikat dan Logika Proposisional 9
1.1.4 Struktur (Sintaks) dan Semantik dalam Logika Predikat 12
1.2 Pembuktian dalam Logika Predikat 22
1.3 Teorema Kelengkapan dan Soundness 25
DAFTAR PUSTAKA **28**
BAB 2 GRAF DAN TEORI JARINGAN **29**
2.1 Pendahuluan 29
2.1.1 Teori Graf 29
2.1.2 Pengertian Graf 30
2.1.3 Graf dalam Notasi Matriks Ketetanggaan 36
2.1.4 Graf Sederhana 40
2.2 Graph Sebagai Model Matematika Dan Aplikasinya 41
2.2.1 Graph Sebagai Model Matematika 41
2.2.2 Jaringan Kerja Sebagai Model Matematika 43
2.2.3 Ikatan Kimia 45
2.2.4 Jaringan Transportasi 47
DAFTAR PUSTAKA **49**
BAB 3 RELASI DAN FUNGSI **51**
3.1 Relasi 51
3.1.1 Pengertian Relasi 51
3.1.2 Notasi dalam Relasi 53
3.1.3 Cara Menyatakan Relasi 54

3.1.4 Operasi Pada Relasi....57
3.1.4 Relasi Ekuivalensi....58
3.2 Fungsi....63
3.2.1 Pengertian Fungsi....63
3.2.2 Kesamaan dua buah fungsi....72
3.2.3 Jenis-Jenis Fungsi....72
BAB 4 KOMBINATORIKA DAN PRINSIP PIGEONHOLE....83
4.1 Pendahuluan....83
4.2 Kombinatorika....84
4.2.1 Permutasi....84
4.2.2 Kombinasi....88
4.2.3 Koefisien dan Identitas Binomial....92
4.2.4 Identitas dan Segitiga Pascal....96
4.3 Prinsip *Pigeonhole* (Sarang Burung Merpati)....99
DAFTAR PUSTAKA....107
BAB 5 MATEMATIKA DISKRIT II KONSEP LANJUT UNTUK PEMODELAN DAN ANALISIS TEORI BILANGAN DAN KRIPTOGRAFI....109
5.1 Pendahuluan....109
5.2 Teori Bilangan dan Kriptografi....111
5.2.1 Bilangan Prima....111
5.2.2 Kongruensi....115
5.2.3 Teorema Euler....117
5.2.4 Algoritma Euclid....119
5.3 Penerapan dalam Kriptografi....120
5.3.1 Algoritma RSA....120
5.3.2 Algoritma Diffie-Hellman....122
5.3.3 Kurva Eliptik dan Kriptografi Kurva Eliptik (ECC)....125
DAFTAR PUSTAKA....130
INDEKS....131
GLOSARIUM....133
BIODATA PENULIS

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1. graf G dengan lima titik dan tujuh sisi 31
Gambar 2. 2. Graf yang sama 32
Gambar 2. 3. Bagian dari graf tak hingga dimaksudkan untuk dibahas lebih lanjut. 33
Gambar 2. 4. Contoh 1.1 34
Gambar 2. 5. Contoh 2.1 34
Gambar 2. 6. Model Graf Jaringan Kerja 35
Gambar 2. 7. Graf bertanda 36
Gambar 2. 8. Graf G 37
Gambar 2. 9. Graf G 38
Gambar 2. 10. Graf Sederhana 40
Gambar 2. 11. Graf tidak sederhana 41
Gambar 2. 12. Graf berarah 42
Gambar 2. 13. Graph berarah 42
Gambar 2. 14. Graph Berarah Simetris 43
Gambar 4. 1. Segitiga Pascal 99
Gambar 4. 2. Jumlah Merpati Lebih Banyak Daripada Lubang Merpati 102
Gambar 5. 1. Diagram alir operasi enkripsi dan dekripsi RSA 121
Gambar 5. 2. Pertukaran Kunci Diffie-Hellman 124

DAFTAR TABEL

Tabel 1. 1. Ringkasan Perbedaan Antara Logika Proposisional dan Logika Predikat.....11
Tabel 5. 1. Perbandingan ECC dengan RSA.....128

BAB 1
LOGIKA MATEMATIKA LANJUT

Oleh Juli Antasari Br Sinaga

1.1 Pengantar Logika Predikat

Logika matematika merupakan fondasi utama dalam perkembangan ilmu matematika dan ilmu komputer. Sebagai cabang matematika yang mempelajari tentang penalaran, logika matematika tidak hanya memberikan kerangka formal untuk memahami kebenaran dan validitas suatu argumen, tetapi juga menjadi alat yang sangat penting dalam pengembangan teori-teori matematika, pemrograman komputer, kecerdasan buatan, dan sistem formal lainnya. Logika matematika lanjut, sebagai perluasan dari logika dasar, membawa kita pada eksplorasi yang lebih mendalam dan kompleks mengenai struktur-struktur formal, sistem deduktif, serta hubungan antara bahasa, makna, dan kebenaran.

Dalam buku ini, kita akan menjelajahi berbagai topik dalam logika matematika lanjut, mulai dari logika predikat, semantik logika, dan sintaks logika, teori pembuktian, teori kelengkapan dan soundness. Setiap bab akan membawa pembaca pada pemahaman yang lebih mendalam tentang bagaimana logika matematika digunakan untuk memodelkan dan menganalisis sistem formal, serta bagaimana logika tersebut berkontribusi pada pemecahan masalah-masalah matematika yang kompleks.

Logika matematika lanjut memberikan kerangka kerja untuk:

- Memahami dasar-dasar matematika.
- Mengembangkan teori yang mendalam di bidang ilmu komputer dan kecerdasan buatan.
- Mempelajari batasan sistem formal seperti yang dijelaskan oleh teorema ketaklengkapan Godel.

Logika matematika lanjut memiliki hubungan erat dengan:

- Matematika: Teori himpunan, struktur aljabar, dan teori bilangan.
- Ilmu Komputer: Komputabilitas, teori algoritma, dan pengembangan sistem formal.
- Filsafat: Dasar-dasar epistemologi dan metafisika dalam matematika.

1.1.1 Definisi Logika Predikat

Pada materi logika proposisi telah dibahas pembuktian kevalidan suatu argumen dengan menggunakan tabel kebenaran, hukum-hukum logika, dan beberapa metode pengambilan kesimpulan, seperti silogisme, modus tollens dan modus ponens. Logika proposisi pada dasarnya hanya dapat membuktikan kevalidan dari pernyataan-pernyataan yang sederhana yang tentunya banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Untuk beberapa argumen yang berisi pernyataan-pernyataan yang rumit, logika proposisi tidak dapat digunakan untuk membuktikan kevalidan suatu argumen. Oleh karena itu dibutuhkan suatu logika lain yang dapat menjangkau argumen-argumen yang lebih kompleks, yaitu **logika predikat**.

Logika predikat adalah cabang logika formal yang memungkinkan kita untuk menganalisis struktur internal dari proposisi. Berbeda dengan logika proposisional, yang hanya mempertimbangkan proposisi sebagai entitas utuh, logika predikat memecah proposisi menjadi subjek dan predikat. Ini memungkinkan kita untuk menyatakan pernyataan seperti "Semua manusia adalah fana" atau "Ada bilangan prima yang genap" dengan presisi matematis.

Logika predikat diperkenalkan oleh **Gottlob Frege**, seorang filsuf dan matematikawan Jerman, pada akhir abad ke-19. Frege memperkenalkan sistem logika formal dalam karyanya yang berjudul *Begriffsschrift* (1879), yang sering dianggap sebagai dasar dari logika modern.

Frege mengembangkan logika predikat untuk mengatasi keterbatasan logika Aristoteles, yang hanya mampu menangani argumen sederhana berbasis kategori. Dengan logika predikat, Frege memperkenalkan konsep kuantor (∀ *untuk semua* dan ∃ *untuk ada*), variabel, serta cara merepresentasikan hubungan antar objek secara lebih formal dan universal.

Predikat adalah kalimat deklaratif yang bergantung pada nilai benar/salah satu atau lebih variabel. Contoh: “x lebih besar dari 5”. Kalimat tersebut dapat ditentukan nilai kebenarannya apabila variabel x ditentukan nilainya, dan dinotasikan sebagai P(x) dimana P adalah predikat “lebih besar dari 5” dan x adalah variabelnya. Pernyataan P(x) disebut juga sebagai nilai fungsi proposional P di x. Nilai x disebut sebagai **domain variabel predikat** yang merupakan himpunan semua nilai yang dapat menggantikan variabel

tersebut. Dengan memahami arti predikat maka dapat dengan mudah memahami definisi dari logika predikat.

Logika predikat adalah perluasan dari logika proposisional yang memungkinkan representasi hubungan antar objek (predikat) serta atribut objek atau elemen dalam domain (term). Term dapat berupa konstanta, variabel, dan fungsi. Nursyahida (2022: 165) berpendapat bahwa logika predikat mempelajari ranah yang lebih kecil dari pada proposisi, yaitu elemen proposisi, dengan fokus utama pada predikat suatu kalimat logika. Lebih lanjut Afrida (2011:56) berpendapat bahwa Logika predikat merupakan pengembangan logika proposisional dengan masalah pengkuantoran dan menambah istilah – istilah baru, misalnya universe of discourse, term, kuantor dan sebagainya.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa **Logika Predikat** (*Predicate Logic*) adalah sistem logika formal yang memperluas logika proposisional dengan memungkinkan analisis struktur internal dari proposisi. Dalam logika predikat, proposisi dipecah menjadi subjek dan predikat, serta memungkinkan penggunaan kuantor untuk menyatakan generalisasi (seperti "semua" atau "ada beberapa"). Logika predikat terdiri dari sintaks (struktur formal) dan semantik (makna dari struktur tersebut).

1.1.2 Komponen Utama Logika Predikat

Berikut ini diuraikan komponen utama logika predikat:

1. Variabel dalam Logika Predikat

Variabel adalah simbol yang mewakili objek dalam domain pembicaraan. Variabel digunakan untuk mengkuantifikasi (menggunakan kuantor) atau merujuk pada elemen-elemen dalam domain.

Notasi:
Variabel biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti x,y,z.
Contoh:

- x: Variabel yang mewakili suatu objek dalam domain.
- y: Variabel lain yang mewakili objek berbeda.

Peran Variabel

1. Kuantifikasi:
   - Variabel digunakan bersama kuantor universal (∀) dan eksistensial (∃).
   - Contoh: $\forall x\, P(x)$ (untuk semua *x*, P(x) benar).
   - Contoh: $\exists y\, Q(y)$ (ada y*y* sehingga Q(y) benar).
2. Referensi Objek:
   - Variabel dapat digunakan untuk merujuk pada objek tertentu dalam formula.
   - Contoh: $P(x) \wedge Q(x)$ (*x* memenuhi *P* dan *Q*).

2. Konstanta dalam Logika Predikat

Konstanta adalah simbol yang mewakili objek spesifik dalam domain. Konstanta memiliki nilai tetap dan tidak berubah.

Notasi:

- Konstanta biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti a,b,c.

Contoh:

- *a*: Konstanta yang mewakili objek tertentu, misalnya "Socrates".
- *b*: Konstanta lain yang mewakili objek lain, misalnya "Plato".

Peran Konstanta

1. Mewakili Objek Spesifik:
   - Konstanta digunakan untuk merujuk pada objek tertentu dalam domain.
   - Contoh: P(a) (objek *a* memenuhi predikat *P*).
2. Membentuk Term:
   - Konstanta adalah salah satu jenis term dalam logika predikat.
   - Contoh: f(a,b) (fungsi *f* diaplikasikan pada konstanta *a* dan *b*).

3. Fungsi dalam Logika Predikat

Fungsi adalah simbol yang mewakili operasi atau pemetaan dari satu atau lebih objek ke objek lain dalam domain. Fungsi memiliki aritas (jumlah argumen) yang tetap.

Notasi:

- Fungsi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti *f*,*g*,*h*.
- Fungsi dengan aritas *n* ditulis sebagai f(t1,t2,…,tn), di mana t1,t2,…,tn adalah term.

Contoh:

- *f*(*x*): Fungsi dengan satu argumen.
- *g*(*x*,*y*): Fungsi dengan dua argumen.

Peran Fungsi

1. Membangun Term Kompleks:
   - Fungsi digunakan untuk membentuk term yang lebih kompleks dari term sederhana (variabel atau konstanta).
   - Contoh: *f*(*a*,*b*) (fungsi *f* diaplikasikan pada konstanta *a* dan *b*)).
2. Merepresentasikan Operasi:

- Fungsi dapat merepresentasikan operasi matematika atau hubungan antara objek.
- Contoh: +(x,y) (penjumlahan antara *x* dan *y*)).

4. Term dalam Logika Predikat

Term adalah ekspresi yang mewakili objek dalam domain. Term dapat berupa:

1. Variabel (misalnya *x*,*y*).
2. Konstanta (misalnya *a*,*b*).
3. Fungsi yang diaplikasikan pada term lain (misalnya *f*(*a*,*b*)).

Contoh:

- *x*: Term berupa variabel.
- *a*: Term berupa konstanta.
- *f*(*x*,*a*): Term berupa fungsi yang diaplikasikan pada variabel *x* dan konstanta *a*.

5. Quantifier dalam Logika Predikat

Quantifier adalah simbol yang digunakan untuk mengukur ruang lingkup variabel. Afrida (2011: 4) menyatakan bahawa quantifier atau kuantor adalah merupakan kalimat ekspresi yang memuat kuantitas objek yang terlibat misalnya ada, semua, beberapa, tidak semua, dan lain-lain. Quantifier terdiri dari 2 jenis yakni:

- ∀ (universal quantifier): "Untuk semua" atau "setiap."
- ∃ (eksistensial quantifier): "Ada beberapa" atau "setidaknya satu."

6. Konektif dalam Logika Predikat

Konektif atau simbol dalam logika predikat terdiri dari:

∧ (dan), ∨ (atau), ¬ (tidak), → (implikasi),dan ↔(biimplikasi).

Contoh Sintaks:

- $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$: "Untuk semua x, jika P(x) benar, maka Q(x) benar".
- $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$: "Ada x sedemikian sehingga P(x) dan Q(x) benar".

Contoh Penggunaan Variabel, Konstanta, dan Fungsi

Contoh 1: Formula Sederhana

Misalkan:

- $P(x)$: x adalah bilangan prima.
- a: Konstanta yang mewakili bilangan 2.
- $f(x)$: Fungsi yang mengembalikan bilangan berikutnya setelah x.

Formula:

- $P(a)$: "2 adalah bilangan prima." (Benar)
- $P(f(a))$: "Bilangan berikutnya setelah 2 adalah bilangan prima." (Benar, karena 3 adalah bilangan prima).

Contoh 2: Formula dengan Kuantor

Misalkan:

- $Q(x,y)$: x lebih besar dari y.
- b: Konstanta yang mewakili bilangan 5.

Formula:

- $\forall x\, Q(x,b)$: "Untuk semua x, x lebih besar dari 5." (Salah)
- $\exists y\, Q(b,y)$: "Ada y sehingga 5 lebih besar dari y." (Benar)

Contoh 3: Formula dengan Fungsi

Misalkan:

- $R(x)$: x adalah bilangan genap
- $g(x,y)$: Fungsi penjumlahan x+y

Formula:

- $R(g(a,b))$: "Hasil penjumlahan 2 dan 5 adalah bilangan genap." (Salah, karena 7 bukan bilangan genap).

1.1.3 Perbedaan Logika Predikat dan Logika Proposisional

Perbedaan mendasar antara logika proposisional dengan logika predikat terletak pada tingkat kompleksitas, struktur, dan kemampuan ekspresifnya. Berikut adalah perbandingan mendetail antara keduanya:

1. **Tingkat Kompleksitas**
   - Logika Proposisional:
     a. Lebih sederhana.
     b. Hanya mempertimbangkan proposisi sebagai unit utuh (atomik) tanpa memecahnya menjadi bagian-bagian yang lebih kecil.
     c. Contoh: "Hari ini hujan" atau "Saya membawa payung".
   - Logika Predikat:
     a. Lebih kompleks.
     b. Memecah proposisi menjadi subjek dan predikat, serta memungkinkan penggunaan variabel, kuantor, dan fungsi.
     c. Contoh: "Semua manusia adalah fana" atau "Ada bilangan prima yang genap".

2. **Struktur**
   - Logika Proposisional:
     a. Proposisi dianggap sebagai pernyataan atomik yang tidak dapat dipecah.
     b. Menggunakan operator logika seperti $\wedge$ (dan), $\vee$(atau), $\neg$ (tidak), $\rightarrow$ (implikasi), dan $\leftrightarrow$ (bikondisional).
     c. Contoh: $P \wedge Q$ (P dan Q benar).
   - Logika Predikat:
     a. Memecah proposisi menjadi:
        Subjek: Objek yang dibicarakan (misalnya, "manusia").

Predikat: Sifat atau hubungan yang dimiliki subjek (misalnya, "adalah fana").

b. Menggunakan variabel, konstanta, fungsi, dan kuantor (∀ untuk "semua" dan ∃ untuk "ada").
c. Contoh: ∀x (Manusia(x)→Fana(x)) (Semua manusia adalah fana).

3. Kemampuan Ekspresif

- **Logika Proposisional**:
  a. Terbatas dalam mengekspresikan pernyataan yang melibatkan generalisasi atau hubungan internal dalam proposisi.
  b. Tidak dapat menangani pernyataan seperti "Semua manusia adalah fana" atau "Ada bilangan prima yang genap".
- **Logika Predikat**:
  a. Lebih ekspresif.
  b. Dapat mengekspresikan pernyataan yang melibatkan kuantifikasi (seperti "semua" atau "ada") dan hubungan antara objek.
  c. Contoh:
     ❖ ∀x (Manusia(x)→Fana(x)): "Semua manusia adalah fana".
     ❖ ∃x (BilanganPrima(x)∧Genap(x)): "Ada bilangan prima yang genap".

Perhatikan contoh berikut untuk lebih memahami perbandingan antara logika predikat dan logika proposisional.

Contoh:

- Logika Proposisional:
  a. Proposisi: "Jika hari ini hujan, maka saya membawa payung".
  b. Representasi: $P \rightarrow Q$, di mana:
     ❖ P: "Hari ini hujan".
     ❖ Q: "Saya membawa payung".
- Logika Predikat:

a. Proposisi: "Semua manusia adalah fana".
b. Representasi: ∀x (Manusia(x)→Fana(x)) di mana:
   - ❖ Manusia(x): "x adalah manusia".
   - ❖ Fana(x): "x adalah fana".

Aplikasi logika proposisional dan logika predikat diuraikan sebagai berikut:

- Logika Proposisional:
  a. Digunakan dalam situasi sederhana di mana proposisi dapat dianggap sebagai unit atomik.
  b. Contoh: Analisis rangkaian digital, perancangan algoritma sederhana.
- Logika Predikat:
  a. Digunakan dalam situasi yang memerlukan analisis struktur internal proposisi dan generalisasi.
  b. Contoh: Kecerdasan buatan, basis data, verifikasi program, dan matematika formal.

Berikut ini disajikan dalam tabel ringkasan perbedaan antara logika proposisional dan logika predikat.

Tabel 1. 1. Ringkasan Perbedaan Antara Logika Proposisional dan Logika Predikat

Aspek	**Logika Proposisional**	**Logika Predikat**
Tingkat Kompleksitas	Sederhana	Lebih kompleks
Struktur	Proposisi atomik	Memecah proposisi menjadi subjek dan predikat
Kemampuan Ekspresif	Terbatas	Lebih ekspresif
Variabel dan Kuantor	Tidak menggunakan variabel atau	Menggunakan variabel dan kuantor

Aspek	Logika Proposisional	Logika Predikat
	kuantor	
Contoh	P→Q	∀x (Manusia(x)→Fana(x))
Aplikasi	Rangkaian digital, algoritma sederhana	Kecerdasan buatan, basis data, matematika formal

1.1.4 Struktur (Sintaks) dan Semantik dalam Logika Predikat

A. Struktur (Sintaks) Logika Predikat

Struktur atau **sintaks logika predikat** adalah aturan formal yang menentukan bagaimana simbol-simbol dalam logika predikat dapat disusun menjadi ekspresi yang valid (disebut **well-formed formulas/WFF**). Sintaks logika predikat mencakup komponen-komponen dasar (variabel, konstanta, predikat, fungsi, quantifier, konektif logika, dan term), aturan pembentukan, dan hierarki simbol. Ada dua jenis bentuk atau formula sebuah sintaks yakni formula atomik dan formula kompleks. Berikut ini diuraikan penjelasannya.

a. Formula Atomik (Atomik Formula)
   Formula atomik adalah ekspresi paling sederhana dalam logika predikat, terdiri dari predikat yang diterapkan pada sejumlah term.
   Contoh:
   - P(x): Predikat uner.
   - Q(x,y): Predikat biner.
   - R(a,f(x),y): Predikat dengan fungsi.

b. Formula Kompleks

Formula kompleks dibangun dari formula atomik menggunakan konektif logika dan quantifier. Aturan pembentukannya adalah:

1. Jika ϕadalah formula, maka ¬ϕ juga formula.
2. Jika ϕ dan ψ adalah formula, maka:
   - ϕ∧ψ (konjungsi),
   - ϕ∨ψ (disjungsi),
   - ϕ→ψ (implikasi),
   - ϕ↔ψ (biimplikasi)

   juga formula.
3. Jika ϕ adalah formula dan x adalah variabel, maka:
   - ∀x ϕ (quantifier universal)
   - ∃$x\phi$ (quantifier eksistensial)

Contoh formula kompleks:

- ∀x(P(x)→Q(x)): "Untuk semua x, jika P(x) maka Q(x)."
- ∃x (P(x)∧Q(x)): "Ada x sedemikian sehingga P(x) dan Q(x)*.”*

Aturan Pembentukan Formula (Well-Formed Formulas/WFF)

Sebuah formula dikatakan **well-formed** jika memenuhi aturan berikut:

1. Setiap formula atomik adalah WFF.
2. Jika ϕ adalah WFF, maka ¬ϕ juga WFF.
3. Jika ϕ dan ψ adalah WFF, maka ϕ∧ψ, ϕ∨ψ, ϕ→ψ, dan ϕ↔ψ juga WFF.
4. Jika ϕ adalah WFF dan x adalah variabel, maka ∀x ϕ dan ∃x ϕ∃ juga WFF.

Contoh WFF:

- $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- $\exists y\,(Q(y) \wedge R(a,y))$.

Contoh Bukan WFF:

- $\forall x\,P(x) \rightarrow Q(x)$: Kurang tanda kurung.
- $P(x \wedge Q(y)$: Struktur tidak valid.

Contoh Sintaks dalam Logika Predikat

1. **Pernyataan Alami**: "Setiap manusia adalah fana."
    - Formal: $\forall x\,(Manusia(x) \rightarrow Fana(x))$.
2. **Pernyataan Alami**: "Ada bilangan prima yang genap."
    - Formal: $\exists x\,(Prima(x) \wedge Genap(x))$.
3. **Pernyataan Alami**: "Jika semua burung bisa terbang, maka ada hewan yang bisa terbang."
    - Formal: $\forall x\,(Burung(x) \rightarrow BisaTerbang(x)) \rightarrow \exists y\,($ $Hewan(y) \wedge BisaTerbang(y))$.

Pohon Sintaks dalam Logika Predikat

Pohon sintaks berperan penting dalam merepresentasikan hubungan antar elemen dalam suatu pernyataan logis. Dengan menggunakan pohon sintaks, kita dapat memahami bagaimana suatu formula logika predikat dibangun, mengidentifikasi struktur argumen, serta memudahkan proses inferensi. Materi ini akan membahas berbagai manfaat pohon sintaks dalam logika predikat, termasuk bagaimana ia membantu dalam validasi argumen, analisis makna, serta implementasi dalam kecerdasan buatan dan pemrosesan bahasa alami.

1. Komponen Pohon Sintaks

Pohon sintaks terdiri dari **simpul (node)** dan **sisi (edge)**. Setiap simpul mewakili komponen sintaksis, sedangkan sisi menunjukkan hubungan antara komponen-komponen tersebut. Jenis simpul terdiri dari 3 bentuk yakni:

1. Simpul Akar (Root Node):
    - Simpul paling atas yang mewakili keseluruhan formula.
    - Contoh: Untuk formula $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$, simpul akar adalah $\forall x$.
2. Simpul Internal (Internal Nodes):
    - Simpul yang memiliki anak (child nodes).
    - Contoh: Konektif logika ($\wedge, \vee, \rightarrow$) atau quantifier ($\forall, \exists$).
3. Simpul Daun (Leaf Nodes):
    - Simpul yang tidak memiliki anak.
    - Contoh: Variabel, konstanta, atau predikat atomik.

2. Aturan Pembentukan Pohon Sintaks

Pohon sintaks dibangun berdasarkan aturan sintaks logika predikat. Berikut adalah langkah-langkahnya:

1. Formula Atomik: jika formula adalah atomik (misalnya $P(x)$), pohon sintaks hanya terdiri dari satu simpul daun yang mewakili predikat tersebut.
2. Konektif Logika: jika formula dibentuk menggunakan konektif logika (misalnya $\phi \wedge \psi$), simpul akar adalah konektif, dan anak-anaknya adalah pohon sintaks untuk ϕ dan ψ.

3. Quantifier: jika formula dibentuk menggunakan quantifier (misalnya ∀x ϕ), simpul akar adalah quantifier, dan anaknya adalah pohon sintaks untuk ϕ.
4. Fungsi: jika term melibatkan fungsi (misalnya f(x,y)), simpul akar adalah fungsi dan anak anaknya adalah pohon sintaks untuk argumen fungsi.

Contoh Pohon Sintaks

Berikut adalah contoh pohon sintaks untuk beberapa formula:

- Formula P(x)
  P(x)
- Formula dengan konektif logika
  Contoh: $P(x) \wedge Q(y)$

```
    ∧
   / \
 P(x) Q(y)
```

- Formula dengan Quantifier
  Contoh: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)$

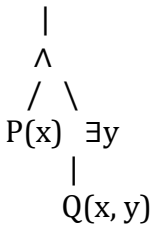
```
    ∀x
    |
    →
   / \
 P(x) Q(x)
```

- Formula dengan fungsi
  Contoh: $P(f(x,y))$

```
    P
    |
    f
   / \
  x   y
```

- Formula Kompleks
  Contoh: $\forall x(P(x) \wedge \exists y Q(x,y))$

```
    ∀x
```



3. Manfaat Pohon Sintaks

Pohon sintaks dalam logika predikat memiliki manfaat untuk:

1. Visualisasi Struktur: memudahkan pemahaman tentang bagaimana formula dibangun dari komponen-komponennya.
2. Analisis Sintaks: membantu mengidentifikasi kesalahan sintaksis, seperti kurung yang tidak seimbang atau arity yang tidak sesuai.
3. Evaluasi Semantik: memberikan kerangka untuk mengevaluasi kebenaran formula berdasarkan interpretasi.
4. Pembuktian Formal: digunakan dalam metode pembuktian, seperti deduksi alami atau tabel semantik.

4. Langkah-Langkah dalam Membangun Pohon Sintaks

Berikut adalah langkah-langkah untuk membangun pohon sintaks dari suatu formula:

1. Identifikasi Komponen Utama: tentukan apakah formula adalah atomik, kompleks, atau melibatkan quantifier.
2. Tentukan Simpul Akar:
   - Jika formula melibatkan quantifier, simpul akar adalah quantifier.
   - Jika formula melibatkan konektif, simpul akar adalah konektif.
   - Jika formula adalah atomik, simpul akar adalah predikat atau fungsi.

3. Bangun Anak-Anak Simpul: untuk setiap komponen formula, buat simpul anak dan ulangi prosesnya.
4. Verifikasi Struktur: pastikan setiap simpul memiliki jumlah anak yang sesuai dengan arity-nya (misalnya, ∧ memiliki dua anak).

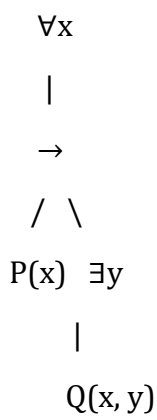
Contoh:

Bentuklah pohon sintaks dari sebuah formula: $\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y))$.

Penyelesaian: tetapkan langkah-langkah berikut ini:

1. Identifikasi komponen utama: formula dimulai dengan quantifier universal ∀x.
2. Tentukan simpul akar: simpul akar adalah ∀x.
3. Bangun anak-anak simpul:
    - Anak dari ∀x adalah implikasi →.
    - Anak dari → adalah P(x)dan ∃y Q(x,y).
    - Anak dari ∃y adalah Q(x,y).

4. Pohon sintaks:



B. Semantik dalam Logika Predikat

Semantik dalam logika predikat berperan penting dalam menentukan makna dari pernyataan logis serta hubungan antar elemen dalam suatu sistem logika. Dengan memahami semantik, kita dapat menafsirkan kebenaran suatu pernyataan berdasarkan model yang sesuai, sehingga memungkinkan analisis yang lebih akurat terhadap argumen logis. Dalam materi ini, kita akan membahas konsep dasar semantik dalam logika predikat, termasuk interpretasi, domain, fungsi kebenaran, serta bagaimana semantik digunakan dalam berbagai aplikasi seperti kecerdasan buatan dan pemrosesan bahasa alami**.**

1. Interpretasi (Interpretation) Semantik

Interpretasi adalah pemberian makna pada simbol-simbol dalam logika predikat. Sebuah interpretasi terdiri dari:

- Domain (D): Himpunan objek yang menjadi pembicaraan.
- Assignment: Pemetaan simbol ke elemen domain.
    - Konstanta: Diberi nilai spesifik dalam domain.

- Predikat: Diberi relasi atau sifat dalam domain.
- Fungsi: Diberi operasi dalam domain.

Contoh Interpretasi:
Misalkan kita memiliki formula $\forall x\, P(x)$.

- Domain D={1,2,3}.
- P(x) diinterpretasikan sebagai "x adalah bilangan genap."
- Maka, P(1) salah, P(2) benar, dan P(3) salah

2. Model

Sebuah model adalah interpretasi yang membuat suatu formula benar. Jika suatu formula benar dalam suatu interpretasi, interpretasi tersebut disebut model dari formula tersebut.

Contoh:
Misalkan formula $\exists x\, P(x)$.
Domain D={1,2,3}.
P(x) diinterpretasikan sebagai "x adalah bilangan genap."
Karena P(2) benar, interpretasi ini adalah model dari formula tersebut.

3. Evaluasi Kebenaran (Truth Evaluation)

Evaluasi kebenaran menentukan apakah suatu formula benar atau salah dalam suatu interpretasi. Proses ini melibatkan:

- Variabel Bebas dan Terikat: variabel terikat oleh quantifier, sedangkan variabel bebas tidak.
- Substitusi: mengganti variabel dengan elemen domain.
- Aturan Evaluasi: 1)formula atomik P(t1,t2,…,tn) benar jika relasi P berlaku untuk t1,t2,…,tn. 2) formula kompleks dievaluasi berdasarkan konektif logika ($\wedge,\vee,\rightarrow,\neg$) dan quantifier ($\forall,\exists$).

Contoh:
Misalkan formula $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Domain $D=\{1,2,3\}$
$P(x)$: "x adalah bilangan genap."
$Q(x)$: "x lebih besar dari 1."
Evaluasi:

- Untuk x=1: P(1) salah, sehingga implikasi benar.
- Untuk x=2: P(2) benar dan Q(2) benar, sehingga implikasi benar.
- Untuk x=3: P(3) salah, sehingga implikasi benar.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa formula benar dalam interpretasi ini.

4. Validitas, Konsistensi, dan Konsekuensi Logis

Validitas (validity) adalah suatu formula valid jika benar dalam semua interpretasi. Contohnya: $\forall x\, P(x) \vee \neg P(x)$ adalah formula valid. Untuk konsistensi (consistency) adalah suatu formula konsisten jika ada setidaknya satu interpretasi yang membuatnya benar. Contoh: $\exists x\, P(x)$ konsisten jika ada domain dimana $P(x)$ benar untuk beberapa x. Selanjutnya konsekuensi Logis (*logical consequence*) adalah suatu formula ϕ yang merupakan konsekuensi logis dari himpunan formula Γ jika setiap model dari Γ juga model dari ϕ. Contoh: Jika $\Gamma=\{\forall x\, P(x)\}$, maka $P(a)$ adalah konsekuensi logis dari Γ.

Contoh:
Analisis semantik dari formula berikut ini:
Misalkan formula:
$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(y))$
Domain: Himpunan bilangan bulat.
P(x,y): "x < y."
Q(y): "y adalah bilangan genap."
Analisis:
Untuk setiap x, kita dapat memilih y=x+1 jika x ganjil, atau y=x+2 jika x genap. Maka, formula ini benar dalam interpretasi ini.

1.2 Pembuktian dalam Logika Predikat

Pembuktian dalam logika predikat adalah salah satu aspek fundamental dalam matematika dan ilmu komputer yang memungkinkan kita untuk memverifikasi kebenaran suatu pernyataan atau argumen. Dengan menggunakan aturan-aturan inferensi, konektif logika, dan quantifier, kita dapat membangun argumen yang valid dan konsisten.

Pembuktian tidak hanya membantu dalam memahami struktur logis dari suatu pernyataan, tetapi juga menjadi alat penting dalam pengembangan teori matematika, verifikasi program, dan kecerdasan buatan. Dalam materi ini, kita akan mempelajari berbagai metode pembuktian, mulai dari pembuktian langsung, pembuktian dengan kontradiksi, hingga penggunaan quantifier untuk membangun argumen yang kuat.

A. Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung

Pembuktian dalam logika predikat melibatkan penggunaan aturan inferensi, kuantor, dan struktur logika untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan.

1. Metode Pembuktian Langsung

Definisi

Pembuktian langsung adalah metode pembuktian di mana kita mulai dari premis-premis yang diberikan dan menggunakan aturan inferensi untuk secara bertahap mencapai kesimpulan.

Langkah-langkah Pembuktian Langsung:

1. Tulis premis-premis yang diberikan.
2. Gunakan aturan inferensi (seperti modus ponens, universal instantiation, dll.) untuk menurunkan pernyataan baru dari premis.
3. Lanjutkan proses ini sampai kesimpulan yang diinginkan tercapai.

Contoh Pembuktian Langsung

Premis:

1. $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$.
2. $\forall x\,\mathrm{P}(x)$.

Kesimpulan: $\forall x\,\mathrm{Q}(x)$.

Langkah Pembuktian:

1. $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$ (Premis 1).
2. $\forall x\,\mathrm{P}(x)$ (Premis 2).
3. $P(c) \rightarrow Q(c)$ (Universal Instantiation dari 1, untuk suatu c arbitrer).
4. $P(c)$ (Universal Instantiation dari 2, untuk suatu c arbitrer).
5. $Q(c)$ (Modus Ponens dari 3 dan 4).
6. $\forall x\,\mathrm{Q}(x)$ (Universal Generalization dari 5).

2. Metode Pembuktian Tidak Langsung

a. Pembuktian dengan Kontradiksi

Definisi:

Pembuktian dengan kontradiksi adalah metode di mana kita mengasumsikan bahwa kesimpulan yang ingin dibuktikan adalah salah, lalu menunjukkan bahwa asumsi ini mengarah pada kontradiksi dengan premis-premis yang diberikan.

Langkah-langkah Pembuktian dengan Kontradiksi:

1. Asumsikan bahwa kesimpulan yang ingin dibuktikan adalah salah.
2. Tunjukkan bahwa asumsi ini mengarah pada kontradiksi dengan premis-premis yang diberikan.
3. Simpulkan bahwa kesimpulan harus benar.

Contoh Pembuktian dengan Kontradiksi

Premis:

1. $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \rightarrow Q(x))$.
2. $\forall x\,\mathrm{P}(x)$.

Kesimpulan: $\forall \mathrm{x}\,\mathrm{Q}(\mathrm{x})$.

Langkah Pembuktian:

1. Asumsikan $\neg\forall x\,\mathrm{Q}(x)$ (kesimpulan salah).
2. Dari asumsi, kita dapatkan $\forall x\,\neg\mathrm{Q}(x)$(ekuivalen logis).
3. $\forall x\,\mathrm{P}(x)$ (Premis 2).
4. $P(c)$ (Existential Instantiation dari 3, untuk suatu konstanta baru c).
5. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (Premis 1)
6. $P(c) \rightarrow Q(c)$ (Universal Instantiation dari 5, untuk c).
7. Q(c) (Modus Ponens dari 4 dan 6).
8. ¬Q(c) (Universal Instantiation dari 2, untuk c).
9. Kontradiksi antara Q(c) dan ¬Q(c).
10. Simpulkan bahwa $\exists \mathrm{x}\,\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ harus benar.

b. Pembuktian dengan Kontraposisi

Definisi:

Pembuktian dengan kontraposisi adalah metode di mana kita membuktikan pernyataan P→Q dengan membuktikan kontrapositifnya $\neg Q \rightarrow \neg P$. Langkah-langkah Pembuktian dengan kontraposisi sebagai berikut:

1. Tulis kontrapositif dari pernyataan yang ingin dibuktikan.
2. Buktikan kontrapositif tersebut menggunakan metode pembuktian langsung.
3. Simpulkan bahwa pernyataan asli benar.

Contoh pembuktian dengan kontraposisi

Pernyataan: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Kontrapositif: $\forall x\,(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(\mathrm{x}))$.

Langkah Pembuktian:

1. Asumsikan $\neg Q(c)$ untuk suatu c arbitrer.
2. Tunjukkan $\neg P(c)$ berdasarkan premis-premis yang diberikan.
3. Simpulkan $\forall x\,(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$.
4. Karena kontrapositif benar, pernyataan asli $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ juga benar.

1.3 Teorema Kelengkapan dan Soundness

Dalam logika predikat, terdapat dua teorema penting yang menghubungkan sintaks (pembuktian formal) dan semantik (model dan interpretasi).

Defenisi 1:

Teorema Kelengkapan menyatakan bahwa jika suatu kalimat benar dalam semua model yang memenuhi aksioma sistem logika, maka kalimat tersebut dapat dibuktikan secara formal dalam sistem tersebut.

Secara formal, jika $\models \phi$ (artinya ϕ benar dalam semua model), maka $\vdash \phi$ (artinya ϕ dapat dibuktikan dalam sistem logika).

Teorema Kelengkapan menjamin bahwa semua kebenaran semantik dapat ditangkap oleh sistem pembuktian formal. Jika suatu pernyataan benar dalam semua model, maka pasti ada cara untuk membuktikannya secara formal.

Contoh:
Misalkan dalam teori grup, kita memiliki kalimat:

$$\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

Kalimat ini benar dalam semua model grup (karena asosiatif adalah aksioma grup). Menurut Teorema Kelengkapan, kalimat ini dapat dibuktikan dalam sistem logika orde pertama.

Defenisi 2:

Teorema Soundness menyatakan bahwa **jika suatu kalimat dapat dibuktikan secara formal dalam suatu sistem logika, maka kalimat tersebut benar dalam semua model yang memenuhi aksioma sistem tersebut**.

Secara formal, jika $\vdash \phi$ (artinya ϕ dapat dibuktikan dalam sistem logika), maka $\models \phi$ (artinya ϕ benar dalam semua model).

Teorema Soundness menjamin bahwa sistem pembuktian formal tidak menghasilkan kesalahan. Jika kita dapat membuktikan sesuatu, maka itu pasti benar. Jika sistem tidak sound, maka kita bisa membuktikan pernyataan yang salah, yang merusak keandalan sistem logika.

Contoh:

Misalkan dalam sistem logika orde pertama, kita memiliki aksioma:

$\forall x(x=x)$

Aksioma ini benar dalam semua model karena setiap objek dalam domain model pasti sama dengan dirinya sendiri.

Hubungan antara Soundness dan Kelengkapan

- Soundness: Jika $\vdash \phi$, maka $\models \phi$.
- Kelengkapan: Jika $\models \phi$, maka $\vdash \phi$.
- Kedua teorema ini bersama-sama menyatakan bahwa kebenaran semantik ($\models$) dan pembuktian formal ($\vdash$) adalah ekuivalen.

Aplikasi Teorema Kelengkapan dan Soundness

1. **Dalam Matematika**
   - Teorema Kelengkapan digunakan untuk membuktikan keberadaan model dari teori-teori matematika.
   - Teorema Soundness digunakan untuk memverifikasi kebenaran pembuktian formal.
2. **Dalam Ilmu Komputer**
   - Dalam verifikasi formal, Teorema Soundness menjamin bahwa program yang diverifikasi benar-benar memenuhi spesifikasinya.
   - Dalam teori basis data, kedua teorema ini digunakan untuk memastikan konsistensi dan kelengkapan query.

DAFTAR PUSTAKA

Arfida, Septilia. 2011. *Peranan Domain Penafsiran Dalam Menentukan Jenis Kuantor*. Jurnal Informatika, Vol. 11 (1).

Enderton, H. B. 2001. *A Mathematical Introduction to Logic* (2nd ed.). San Diego, CA: Academic Press.

Haryono, A**.** 2018. *Matematika Diskrit dan Logika*. Jakarta: Penerbit Erlangga

Siswanto, H. 2012. *Logika Matematika untuk Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Offset

Suryadi, M. T. 2010. *Logika Matematika: Dasar-dasar Penalaran Formal*. Bandung: Penerbit Informatika.

Sutarno, E**.** 2015. *Logika dan Teori Himpunan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Van Dalen, D. 2013. *Logic and structure* (5th ed.). Berlin: Springer.

BAB 2
GRAF DAN TEORI JARINGAN

Oleh Lilis

2.1 Pendahuluan

2.1.1 Teori Graf

Sejarah graph theory dimulai pada tahun 1736 dengan makalah Euler, mencakup upaya untuk memecahkan permasalah jembatan Konigsberg, yang terkenal di seluruh eropa. Namun, tidak ada kemajuan penting dalam teori graf selama sekitar satu abad setelah publikasi karya Euler. Teori pohon berhasil dikembangkan pada 1847 oleh G.R. Kirchoff (1824–1887) dan digunakan untuk masalah jaringan listrik. Menurut, A. Cayley (1821–1895) setelah 10 tuhun juga menjelaskan masalah kimia, yaitu yang melibatkan hidrokarbon, dengan menggunakan gagasan pohon.

Selama era Kirchhoff dan Cayley, dua perkembangan signifikan muncul dalam teori grafik. Salah satunya adalah dugaan empat warna, yang mengusulkan bahwa sebuah atlas dapat diwarnai hanya menggunakan empat warna, memastikan bahwa tidak ada dua daerah yang berdekatan berbagi warna yang sama. Ahli teori grafik percaya bahwa A.F. Möbius (1790–1868) adalah orang pertama yang memperkenalkan masalah ini selama kuliah pada tahun 1840. Satu dekade kemudian, A. De Morgan (1806–1871) meninjau

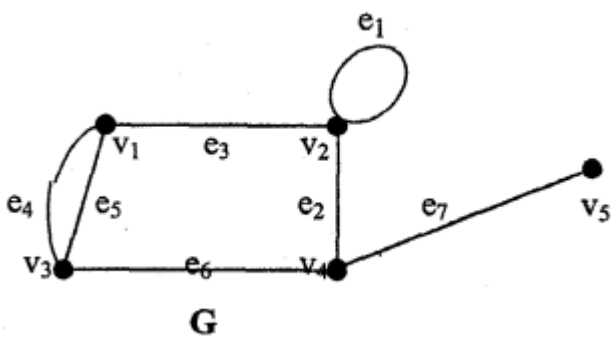
kembali masalah ini dalam diskusi dengan sesama matematikawan di London. Akibatnya, tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi terdokumentasi paling awal untuk masalah empat warna. Dugaan ini mendapat pengakuan luas setelah Cayley menerbitkannya pada tahun 1879 dalam volume perdana Proceedings of the Royal Geographical Society. Kontribusi penting lainnya untuk kemajuan teori grafik datang dari Sir W.R. Hamilton (1805–1865).

Pada tahun 1859, ia menciptakan permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari sebuah dodekahedron beraturan dari kayu sebuah polihedron dengan 12 sisi dan 20 titik sudut. Setiap sisi adalah pentagon beraturan, dan setiap titik sudut dibentuk oleh perpotongan tiga sisi yang berbeda. Setiap titik sudut dodekahedron dikaitkan dengan kota yang terkenal, seperti New York, London, dan Paris. Tujuan dari permainan tersebut adalah untuk menentukan rute di sepanjang tepi dodekahedron yang akan melewati semua 20 kota tepat satu kali. Meskipun masalah ini sekarang dianggap relatif sederhana, pada saat itu, tidak seorang pun dapat menetapkan kondisi yang perlu dan cukup untuk keberadaan rute tersebut.

2.1.2 Pengertian Graf

Graf linier (graf) G = (V,E) merupakan sebuah sistem yang terdiri dari suatu himpunan objek V = {v_1, v_2, ...} yang disebut himpunan titik dan koleksi E = {ei, e_2, ...} yang disebut koleksi sisi. Setiap sisi ek dihubungkan dengan suatu pasangan tak-terurut (v_1, vj), yang disebut titik-titik ujung sisi e_k.

Metode yang paling umum untuk merepresentasikan grafik adalah melalui diagram. Dalam diagram ini, titik-titik digambarkan sebagai noktah dan setiap sisi digambarkan sebagai kurva sederhana yang menghubungkan dua simpul. Untuk ilustrasi yang lebih jelas, lihat contoh graf pada Gambar 1.1 di bawah .



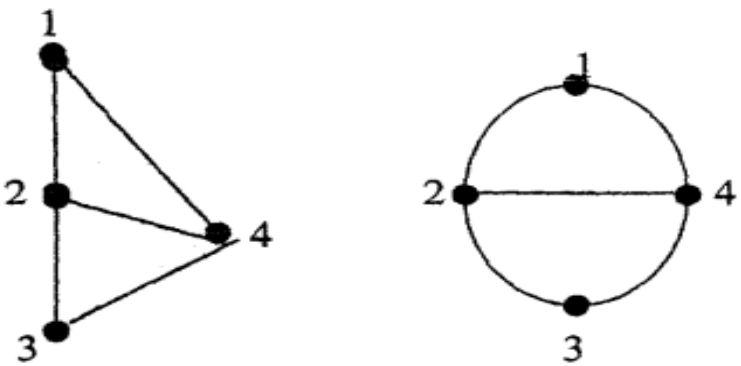
Gambar 2. 1. graf G dengan lima titik dan tujuh sisi

Ada kemungkinan bahwa suatu sisi dikaitkan dengan pasangan (v2, v2) dalam suatu graf, seperti yang ditunjukkan pada contoh sebelumnya. Sebuah loop atau gelang adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Dilihat dari graf pada Gambar 1.1, e1 adalah sebuah loop. Selain itu, perlu diingat bahwa lebih dari satu sisi dapat dikaitkan dengan lebih dari satu pasangan titik dalam sebuah graf; dalam kasus ini, e4 dan e5 dikaitkan dengan pasangan titik (v1, v3). Pasangan sisi seperti ini disebut sisi sejajar, paralel, atau rangkap.

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki loop dan sisi paralel. Pembahasan tentang referensi teori graf biasanya terbatas pada graf sederhana. Namun, penyertaan loop dan sisi paralel sangat penting dalam berbagai aplikasi teknik.

Beberapa penulis menggunakan istilah "graf sederhana" untuk menggambarkan graf yang tidak memuat loop dan sisi paralel dan "graf umum" untuk menggambarkan graf yang tidak memuat kedua hal tersebut.

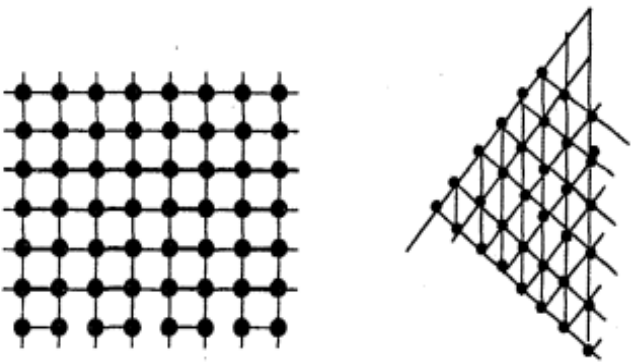
Saat menggambar graf, bentuk sisi dapat direpresentasikan sebagai ruang garis lurus atau ruas garis lengkung. Demikian pula ukurannya, bukanlah faktor penentu dalam representasi graf. Aspek utama yang perlu diperhatikan dalam grafik adalah insidensi antara titik dan sisinya. Misalnya, Gambar 1.2 di bawah ini mengilustrasikan graf yang sama, karena insidensi antara sisi-sisi dan titik-titik pada graf tersebut adalah sama.



Gambar 2. 2. Graf yang sama

Seperti yang ditunjukkan dalam definisi graf, himpunan titik V dan himpunan sisi E tidak selalu merupakan himpunan hingga; namun, dalam praktik teori graf, kedua himpunan tersebut biasanya merupakan himpunan hingga. Grafik G = (V, E) adalah grafik di mana V dan E dianggap hingga atau terhingga, dan G dianggap sebagai graf tak hingga jika V dan E

tidak hingga. Grafik hingga ditunjukkan di Gambar 1.1 dan 1.2, dan grafik tak hingga ditunjukkan di Gambar 1.3.

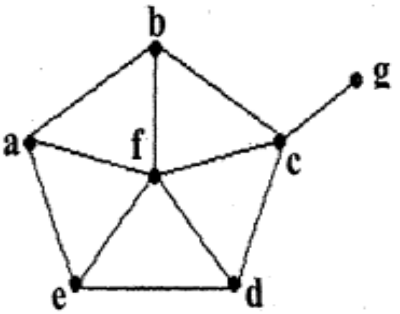


Gambar 2. 3. Bagian dari graf tak hingga dimaksudkan untuk dibahas lebih lanjut.

Misalkan graf G memiliki jalan (walk) yang terdiri dari barisan berhingga (tak kosong) W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 … ek vk yang suku-sukunya mengganti titik dan sisi, sehingga v_1-1 dan v_1 adalah titik akhir sisi ei, untuk 1 < i < k. Kita katakan W adalah jalan dari v_0 ke v_k, atau jalan - (v_0,v_k). Titik-titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut sebagai titik awal dan titik akhir W. dan titik-titik v_1, v_2, …, v_k-1 disebut sebagai titik-titik internal dari W dan k disebut sebagai panjang W. Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W. W dikatakan jejak (trail) jika semua sisi e_1, e_2, e_3, …, e_k dalam jalan W berbeda. W dikatakan sebuah lintasan (path) jika semua titik v_0, v_1, v_2, v_k dalam jalan W juga berbeda. Jika titik awal dan titik akhir dari jalan W identik (sama), maka jalan W disebut tertutup. Sirkit adalah istilah untuk jejak tertutup. Siklus adalah kumpulan titik yang

memiliki titik awal dan titik internal yang berbeda. Cn adalah simbol untuk siklus dengan titik.

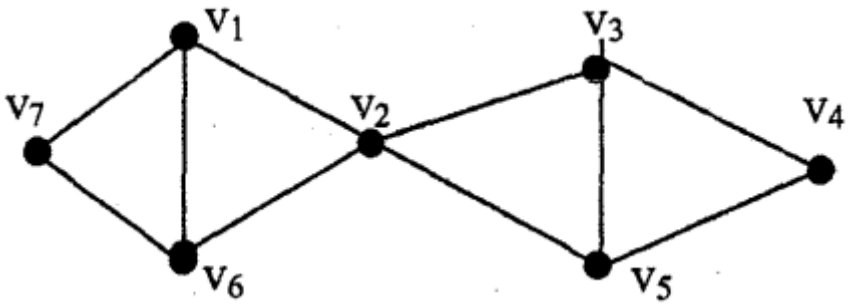
Contoh:1.1.



Gambar 2. 4. Contoh 1.1

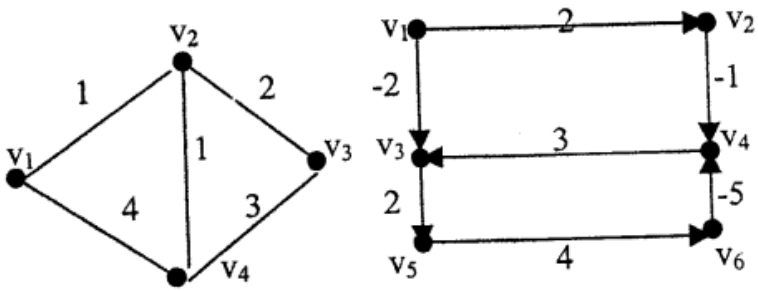
Dalam graf G pada Gambar 2.4, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1$ adalah sirkit yang bukan merupakan siklus; sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5, v_2 adalah sebuah siklus.

Contoh 2.1.



Gambar 2. 5. Contoh 2.1

Sebuah jaringan kerja dapat didefinisikan sebagai graf atau graf berarah jika memiliki fungsi untuk memetakan himpunan sisi atau sisi berarah ke himpunan bilangan real. Gambar 1.7 di bawah ini menunjukkan diagram dua jenis jaringan kerja, yaitu jaringan kerja berarah (graf berarah) dan jaringan kerja tidak berarah (graf).



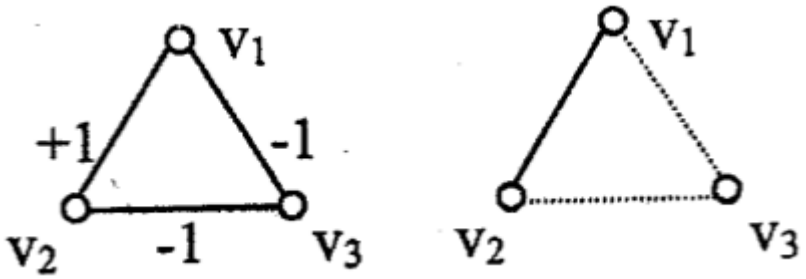
Gambar 2. 6. Model Graf Jaringan Kerja

Jaringan kerja tidak berarah dengan graf bertanda S memiliki nilai fungsi + l atau -1. Karena tiap sisi dari S dipasangkan dengan tanda positif atau negatif, maka dapat dipahami bila each sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai ilustrasi:

jika V = {V_1, V_2, V_3} E = {V_1,V_2, V $_1$V $_2$, V_2V_3}

dan f = {V $_1$V $_2$, + 1), (V_1V_3, -1), {V_2V_3, -1)}

Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.8 di bawah ini, ada dua cara untuk menampilkan graf bertanda tersebut :

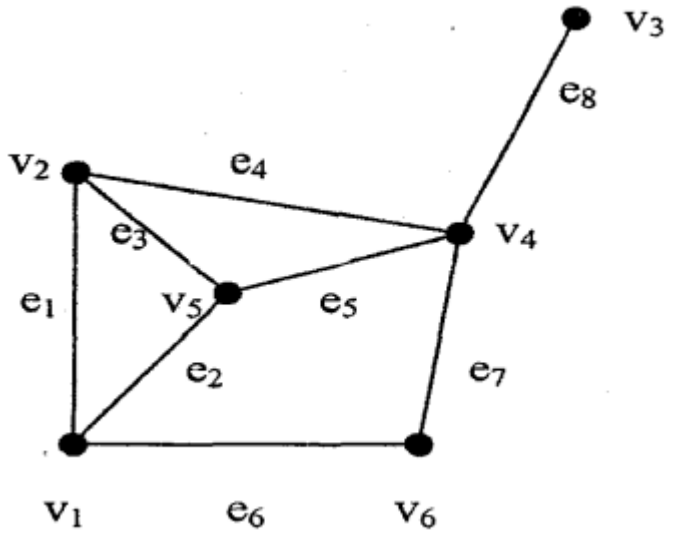


Gambar 2. 7. Graf bertanda

2.1.3 Graf dalam Notasi Matriks Ketetanggaan

Sebuah graf tidak hanya dapat diwakili sebagai suatui matriks insidensi, tetapi juga dapat diwakili sebagai matriks keterhubungan atau ketetanggaani. Sebagai contoh, anggaplah graf G memiliki n titik dan matriks ketetanggaannya adalah matriks bujursangkari (persegi) berordo n, X(G) (xij), dengan elemen xij menunjukkan banyaknya sisi yang menghubungkan titik ke-i dan j. Dengan definisi ini, kita dapat mengatakan bahwa sebuah graf dapat memiliki sisi paralel atau loop dengan matriks ketetanggaannya.

Contoh: Gambar 1.11 di bawah ini menunjukkan sebuah graf yang tidak memiliki sisi paraleli, bersama dengan matriks ketetanggaannya.

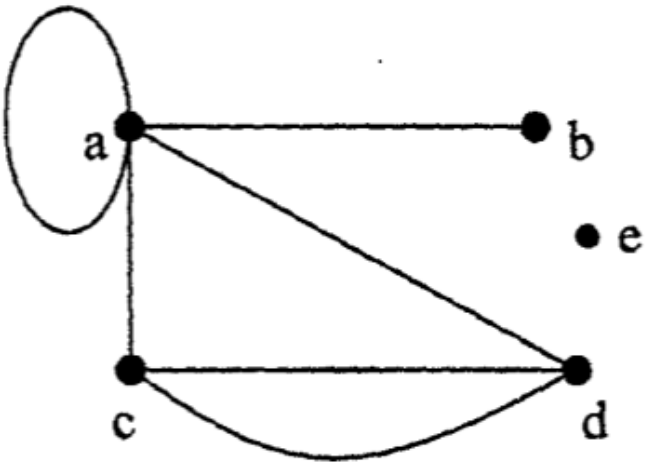


Gambar 2. 8. Graf G

Matriks ketetanggaannya:

$$X(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh: Gambar 1.10 di bawah ini menunjukkan sebuah graf dengan sisi paralel dan loop, bersama dengan matriks ketetanggaannya.



Gambar 2. 9. Graf G

Matriks ketetanggaannya:

$$X(H) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jika kita teliti matriks ketetanggaan X di graf G dengan cermat, akan diperolehbeberapa hal berikut:

1. Jika dan hanya jika graf matriks X tidak memuat loop, elemen-elemennya sepanjang diagonali bernilai 0. Sebuah loop pada titik ke-i berpadanan dengan xii = 1.
2. Dengan demikian, matriks ketetanggaan X tidak hanya didefinisikan untuk grafik yang tidak memiliki sisi

paralel karena definisi matriks ketetanggaan memungkinkan adanya ketentuan untuk sisi paralel.

3. Dalam kasus di mana graf tidak mengandung loop dan sisi paralel, derajat suatu titik sama dengan jumlah atau banyak elemen 1 pada baris atau kolom yang bersesuaian dengan X.
4. Posisi titik berubah ketika permutasi baris dan kolom bergerak dengan cara yang sesuai. Perlu diingat bahwa saat melakukan permutasi, baris dan kolom harus disusun dalam urutan yang sama. Oleh karena itu, jika dua baris dalam X dipertukarkan, maka kolom yang bersesuaian juga harus dipertukarkan. Dengan demikian, dua graf Gl dan G2 yang tidak memiliki sisi paralel adalah isomorfk jika dan hanya jika matriks matriks ketetanggaannya, X(G1) dan X(G2), saling berkaitan.
5. Sebuah graf G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen G_1 dan G_2 jika dan hanya jika matriks ketetanggaannya yakni X(G) dapat dipartisikan sebagai:

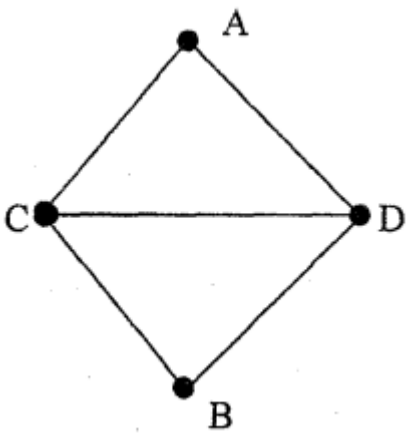
$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & 0 \\ 0 & X(G_2) \end{bmatrix}$$

Dengan matriks ketetanggaan X(G) dari komponen G1 dan matriks ketetanggaan X(G2) dari komponen G2. Jelas bahwa partisi ini mengakibatkan tidak adanya sisi yang menghubungkan titik dalam subgraf G1 dengan titik dalam subgraf G2.

6. Sebuah matriks biner Q berordo n diberikan. Maka, sebuah graf G dengan n titik selalu dapat dibentuk (dan tidak memiliki sisi paralel, sehingga Q merupakan matriks ketetanggaan dari G).

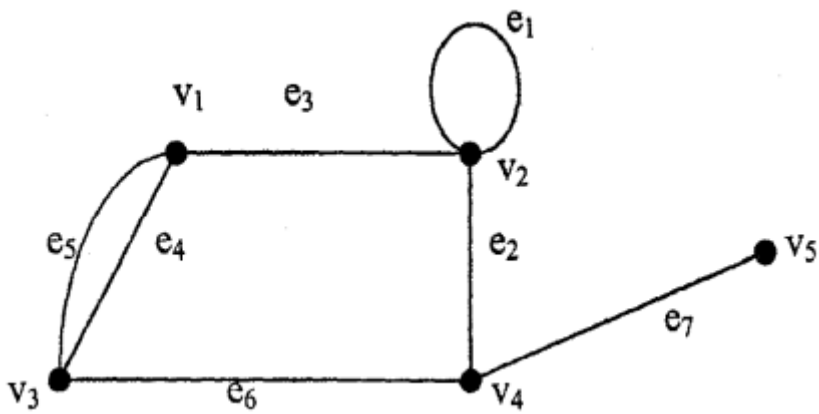
2.1.4 Graf Sederhana

Graf sederhana tidak memiliki sisi paralel dan loop. Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 2.10 di bawah ini.



Gambar 2. 10. Graf Sederhana

Karena graf tersebut tidak memiliki loop dan sisi paralel, maka graf tersebut dimasukkan sebagai graf sederhana. Hal ini ditunjukkan dengan fakta bahwa graf pada Gambar 1.13 di bawah ini tidak termasuk sebagai graf sederhana karena memiliki loop dan dua sisi paralel.



Gambar 2. 11. Graf tidak sederhana

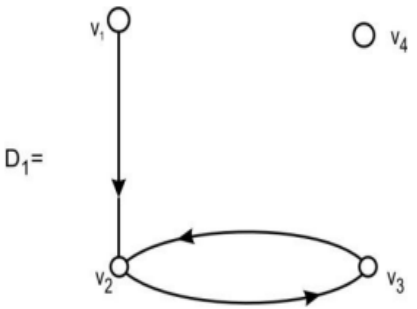
2.2 Graph Sebagai Model Matematika Dan Aplikasinya

2.2.1 Graph Sebagai Model Matematika

Suatu himpunan yang tidak kosong dengan relasi R pada V adalah graph berarah D. R merupakan relasi tidak refleksif. Element V disebut titik, seperti dalam grafik sebelumnya. Ada istilah "sisi berarah" atau "arah" untuk setiap pasangan terurut dalam R. Karena relasi dari sebuah graph berarah D tidak harus simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah D, maka (v, u) belum tentu merupakan arah D. Ini dapat digambarkan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v, atau dengan tanda panah sebagai tanda arah dari u ke v atau dari v ke u. Jika dari u ke v masing-masing mempunyai arah, kita dapat membuat diagram seperti yang ditunjukkan di bawah ini, Gambar 2.1..

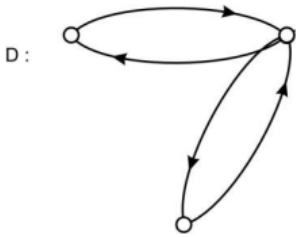
Gambar 2. 12. Graf berarah

Misalkan D_1 adalah sebuah graph berarah dengan V = {v_1 , v_2 , v_3 , v_4 } dan E = {(v_1 , v_2), (v_2 , v_3), (v_3 , v_2)}. Graph berarah D_1 , dapat dibuat seperti gambar di bawah ini (Gambar 2.13)



Gambar 2. 13. Graph berarah

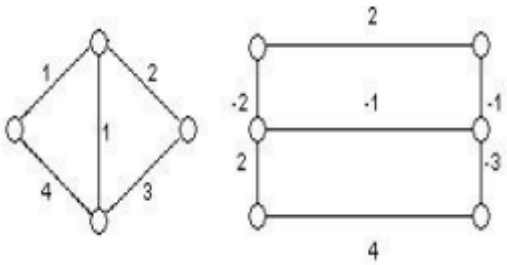
Selain itu, mungkin terjadi bahwa relasi yang mendefinisikan sebuah garis berarah D adalah sebuah relasi simetris. Contoh garis berarah simetris dapat ditemukan dalam gambar di bawah ini.



Gambar 2. 14. Graph Berarah Simetris

2.2.2 Jaringan Kerja Sebagai Model Matematika

Sebuah jaringan kerja adalah grafik berarah di mana fungsi dapat menetapkan himpunan nilai bilangan real di setiap sisinya. Jaringan kerja yang tidak berarah disebut jaringan kerja berarah, dan jaringan kerja yang berarah disebut jaringan kerja berarah. Diagram berikut menunjukkan contoh kedua jenis jaringan tersebut.



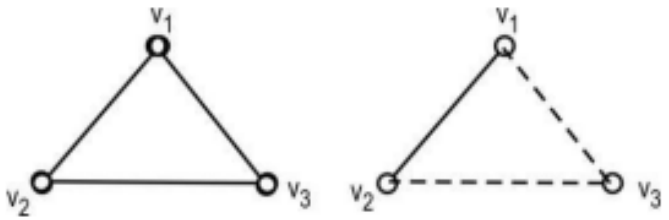
Setiap sisi S dapat dipahami jika disebut sisi positif atau negatif. Sebagai ilustrasi, jika dan

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}.$$

$$f = \{(v_1, v_2, +1), (v_1, v_3, -1), (v_2, v_3, -1)\}$$

Graph bertanda seperti ini dapat diwakili dalam dua cara, seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



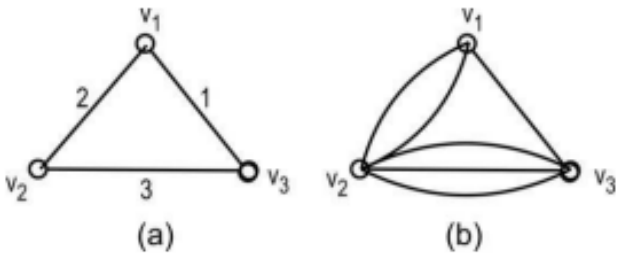
Graf bertanda dapat digunakan untuk menunjukkan hubungan ketetanggaan. Dua keluarga yang memiliki hubungan yang baik satu sama lain dapat diwakili oleh sisi positif, sedangkan dua keluarga yang memiliki hubungan yang kurang baik dapat diwakili oleh sisi negative. Jika dua keluarga tersebut tidak berhubungan atau tidak saling mengenal, maka tidak ada sisi yang mewakili dua tetangga tersebut. Model matematika biasanya menggunakan jaringan kerja tak berarah dengan nilai fungsi sebagai bilangan bulat positif. Untuk menunjukkan jaringan kerja tak berarah ini, ada dua pendekatan utama yang umum digunakan. Sebagai contoh, jika

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$$

$$f = \{(v_1v_2, 2), (v_1v_3, 1), (v_2v_3, 3)\}$$

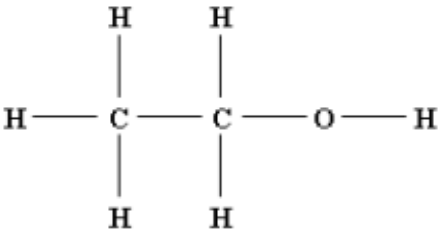
Suatu jaringan kerja tidak berarah dengan nilai fungsi -1 atau + 1 disebut graph bertanda S. Untuk membuat jaringan kerjanya, tanda positif atau negatif dipasangkan pada setiap elemen, seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



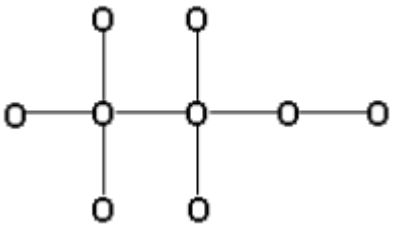
Multigraph adalah istilah yang digunakan untuk menggambarkan jaringan kerja tak berarah yang digambarkan pada Gambar 2.6. Misalnya, multigraph M memiliki himpunan sisi E dan fungsi. Dalam kasus di mana UV_1 memiliki E dan (n adalah bilangan bulat positif), u dan v dihubungkan oleh sisi. Jenis sisi ini dikenal sebagai sisi multipel.

2.2.3 Ikatan Kimia

Teori grafik juga sangat bermanfaat dalam kimia. Kita mengenal ikatan kimia seperti H_2SO_4, CO_2, H_2O, dan CH_4. Tiap molekul kimia memiliki sejumlah atom yang terikat padanya. Sebagai contoh, sebuah atom karbon dikaitkan dengan 2 atom oksigen, seperti yang terlihat dalam ethanol, C_2H_5OH, di mana sebuah atom karbon dikaitkan dengan 3 atom hidrogen, sedangkan atom karbon lainnya dikaitkan dengan 2 atom hidrogen, 2 atom oksigen, dan atom oksigennya hanya dikaitkan dengan satu atom hidrogen. Lihat Gambar 2.4.



Struktur C_2H_5OH seperti yang ditunjukkan pada gambar di atas terdiri dari ikatan kimia yang cukup kompleks. Dalam teori grafik, ikatan kimia ini dapat digambarkan dalam grafis seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.8. Valensi dari tiap atom yang berkorespondensi ditunjukkan dalam grafik, yang terdiri dari banyaknya sisi yang menghubungkan sebuah titik.

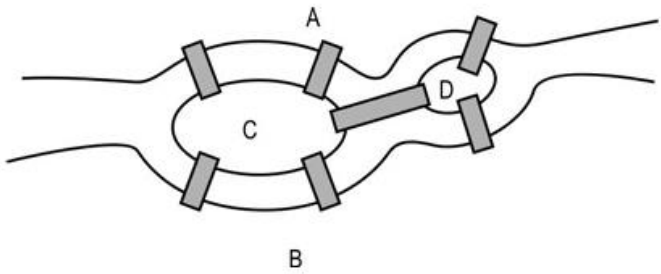


Tahun 1864 (seribu delapan ratus enam puluh empat), diagram yang ditunjukkan pada Gambar 2.8 pertama kali digunakan untuk menunjukkan susunan atom dalam suatu molekul. Alexander Crum Brown (1838–1922) adalah orang pertama yang mengusulkan konsep ini; dia juga memperkenalkan konsep isomerisme, yang merujuk pada keberadaan isomer-isomer. Isomer menunjukkan molekul-molekul yang memiliki sifat kimia yang berbeda meskipun memiliki rumus kimia yang sama. Bagaimana atom terhubung satu sama lain dapat dilihat pada diagram ini. Untuk memahami bagaimana molekul bertindak, informasi ini

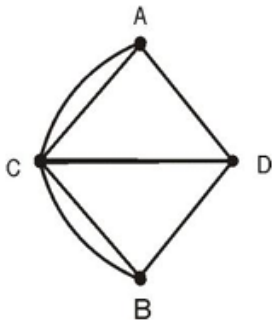
sangat penting. Isomorfisme dan masalah pengkodean terkait erat dengan masalah dokumentasi kimia, yang menunjukkan bahwa penyelesaian masalah isomorfisme graf bagian sangat membantu penelitian tentang struktur kimia.

2.2.4 Jaringan Transportasi

klasik dalam teori garis, karena teori garis didirikan dari masalah transportasi yang terkenal, Jembatan Konigsberg. Gambar 2.9 di bawah ini menunjukkan gambar jembatan tersebut.



Pada gambar, huruf A, B, C, dan D menunjukkan wilayah yang terhubung oleh tujuh jembatan. Situasi seperti ini dapat diwakili dengan graph sederhana, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.10 di bawah ini.



DAFTAR PUSTAKA

Bradley, J. (1988). Introduction to Discrete Mathematics. New York: Addison Wesley.

Buckley, F. & Lewinter, M. (2003). A Friendly Introduction to Graph Theory. New York: Pearson Education, Inc.

Chartrand, G. (1985). Introductory Graph Theory. New York: Dover Publications.

Deo, N. (1989). Graphh Theory with Applications to Engineering and Computer Science. New Delhi: Prentice-Hall.

Didi Suryadi dan Nanang Priatna. Modul Pengetahuan Dasar Teori Graph

Suryadi, D. (1996). Matematika Diskrit. Jakarta: Universitas Terbuka.

Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). Matematika Diskrit. Malang: UM Press.

Witala, S.A. (1987). Mathematics. New York: McGraw-Hill

BAB 3
RELASI DAN FUNGSI

Oleh Adi Suarman Situmorang

3.1 Relasi

3.1.1 Pengertian Relasi

Berbicara tentang relasi, bukan suatu hal yang baru lagi. Saat kita berinteraksi dengan dunia masyarakat, di mana pun kita berada, kata ini sering kali kita ucapkan dan begitu banyak penggunaan kata relasi ini kita ucapkan di dalam kehidupan kita sehari-hari. Perlu juga kita ketahui bahwa antara anggota dari dua kelompok atau himpunan seringkali kita temukan suatu relasi (hubungan) yang terdefinisi secara tertentu. Relasi sering kali diartikan sebagai hubungan, dan kita sering kali kita menemukan relasi atau hubungan tertentu dari anggota-anggota dari dua buah himpunan. Saat kita belajar matematika, relasi sering kali dikaitkan dengan pernyataan hubungan antara anggota dari dua himpunan sehingga dari relasi keanggotaan tersebut kita dapat mendefinisikannya dengan jelas.

Secara umum dapat kita nyatakan bahwa suatu relasi dari himpunan M ke himpunan N merupakan himpunan bagian dari $M \times N$ (suatu produk Cartesius dari M dan N). Relasi dari suatu himpunan domain (M) ke daerah himpunan kodomain (N) sering dinyatakan sebagai suatu pemetaan di

setiap himpunan M (atau disimbolkan $x \in M$) ke anggotanya himpunan N (atau dinotasikan dengan $x \in N$). Sehingga perlu kita ketahui bahwa hubungan dari suatu anggota himpunan di *M* dan anggota di himpunan *N* termasuk himpunan juga, yang mana himpunan tersebut berisi pasangan-pasangan terurut yang memiliki aturan-aturan tertentu, seperti pasangan terurut (x,y) $\in \mathcal{R}$. Relasi biner $\mathcal{R}$ dari himpunan *M* ke himpunan *N* merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $M \times N$ atau $\mathcal{R} \subseteq (M \times N)$.

Contoh:

a. Diketahui ada empat mahasiswa memiliki mata kuliah kegemarannya sebagai berikut:
   Luky menggemari Kalkulus, Lucy dan Intan memiliki kegemaran Matematika Diskrit, dan Mirza kegemarannya mata kuliah Geometri.
   Sehingga, kita akan menemukan dua himpunan dari pernyataan kegemaran mata kuliah di atas, sebagai berikut:
   K = himpunan mahasiswa
   = {Luky, Lucy, Intan, dan Mirza}
   L = himpunan matakuliah
   = {Kalkulus, Matematik Diskrit, Geometri}
   Relasi dari anggota kedua himpunan K ke himpunan L yang dapat didefinisikan adalah: kesukaan, kegemaran, menyenangi dan lain sebagainya.
b. Diberikan dua himpunan:
   P = {4, 6, 9, 10, 12}
   Q = {3, 4, 5, 6}
   Dari dua himpunan tersebut didapat :
   4 pada himpunan P dipasangkan dengan 4 di himpunan Q
   6 pada himpunan P dipasangkan dengan 3, dan 6 di himpunan Q
   9 pada himpunan P dipasangkan dengan 3 di himpunan Q

10 pada himpunan P dipasangkan dengan 5 di himpunan Q
12 pada himpunan P dipasangkan dengan 3, 4, dan 6 di himpunan Q
Pasangan terurut atau relasi dari anggota himpunan P ke anggota himpunan Q yang dapat didefinisikan adalah "habis dibagi", sedangkan relasi antara anggota di himpunan Q ke himpunan P yang dapat didefinisikan adalah "habis membagi".

Dari contoh relasi dari kedua himpunan di atas tentunya kita akan dapat menemukan istilah daerah asal (domain) dan daerah kawan (kodomain), yang mana dari contoh di atas himpunan K dan P kita sebut sebagai daerah asal dan himpunan L dan Q kita sebut dengan daerah kawan. Sementara pernyataan habis dibagi dan habis membagi kita namakan dengan relasi. Dan yang terakhir, kita akan nyatakan bahwa himpunan semua anggota di kodomain akan kita sebut dengan range atau daerah hasil.

3.1.2 Notasi dalam Relasi

Sebelum kita mempelajari lebih jauh tentang pernyataan relasi, perlu kita pahami terlebih dahulu yang namanya notasi yang berlaku pada relasi. Dalam belajar relasi dari dua objek dapat kita definisikan dengan pasangan berurut ${}_{\chi}\Re_{\gamma}$ atau $(\chi,\gamma)\in\Re$

Contoh: relasi F adalah pemetaan atau hubungan antara Ibu dengan anak, maka:

F = $\{(\chi,\gamma)|\chi$ adalah ibu dari $\gamma\}$

${}_{\chi}\Re_{\gamma}$ dapat dibaca: χ memiliki hubungan $\Re$dengan γ

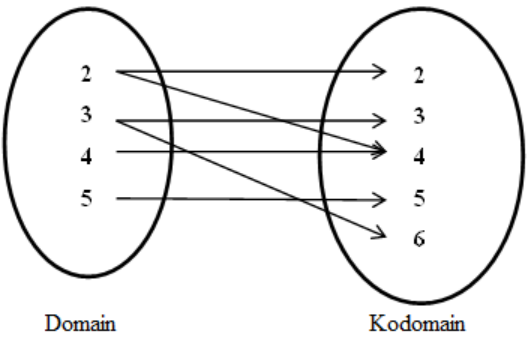
3.1.3 Cara Menyatakan Relasi

Relasi/hubungan dua buah himpunan M dan N disajikan dengan cara berikut:

Contoh:
M = {2, 3, 4, 5}
N = {2, 3, 4, 5, 6}
2 berpasangan ke 2, 4, dan 6
3 berpasangan ke 3 dan 6
4 berpasangan ke 4
5 berpasangan ke 5

a. Diagram Panah

Berbicara tentang relasi dua himpunan tidak terlepas dari yang namanya diagram panah, yang menunjukkan kekuatan hubungan dari kedua himpunan. Jika suatu relasi dinotasikan dengan $f : M \rightarrow N$, maka ini menunjukkan bahwa himpunan M yang diletakkan di sebelah kiri dinyatakan sebagai domain, dan N yang diletakkan di sebelah kanannya disebut sebagai kodomain. Sedangkan penunjukkan arah panah dari himpunan M ke himpunan N disebut dengan relasi dari kedua himpunan. Diagram panah dari relasi kedua himpunan dapat dilihat seperti gambar berikut.

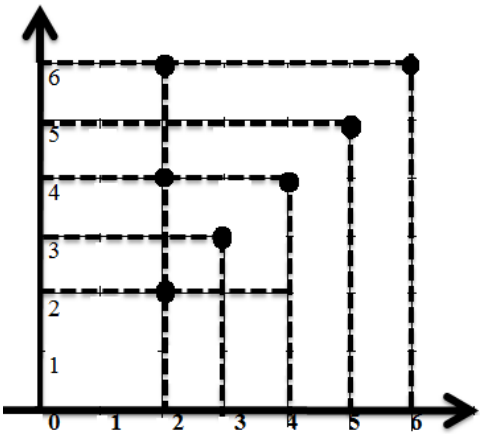


b. Himpunan Pasangan Berurutan

Andai α adalah suatu lambang keanggotaan dari himpunan M dan y sebagai lambang keanggotaan dari himpunan N, maka pemetaan atau relasi dari M ke N dinyatakan dengan pasangan terurut (α,β). Dari gambar diagram panah di atas akan kita peroleh himpunan pasangan berurutannya, yang dapat dituliskan sebagai berikut: {(2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5)}.

c. Diagram Kartesius

Dalam grafik koordinat cartesius, semua anggota di himpunan daerah asal akan kita letakkan pada sumbu *X* atau yang kita namakan dengan garis horizontal, sedangkan anggota dari himpunan daerah kawan, kita letakkan pada sumbu *Y* atau yang kita namakan dengan garis vertical. Untuk daerah hasil dari relasi kedua himpunannya adalah berupa titik-titik koordinat yang kita peroleh dari pemetaan setiap anggota himpunan pada diagram cartesius. Hasil pemetaannya pada diagram cartesius tersebut dapat kita lihat seperti gambar berikut.



d. Tabel

Hasil pembacaan dari grafik diagram cartesius di atas dapat juga kita sajikan dalam bentuk tabel atau matriks. Pasangan berurut hasil relasi himpunan M ke himpunan

N, dapat dibuat ke dalam bentuk tabel seperti tabel di bawah ini :

M	**N**
2	2
2	4
2	6
3	3
4	4
5	5

e. Matriks
Baris = domain
Kolom = kodomain

N / M	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

Bentuk matrik :

1	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

3.1.4 Operasi Pada Relasi

Kita mengetahui bahwa operasi yang berlaku pada himpunan, seperti: irisan ($\cap$), gabungan ($\cup$),selisih ($-$), dan penjumlahan ($\oplus$) dan beda setangkup (\) juga berlaku pada relasi. Sehingga, jika $\mathcal{R}_1$ dan $\mathcal{R}_2$ masing-masing merupakan relasi dari himpunan M ke himpunan *N*, maka $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$, dan $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ juga adalah relasi dari *M* ke *N*.

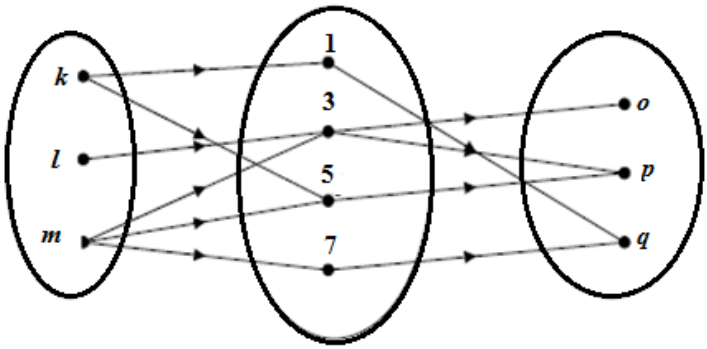
Contoh.
Andai $M = \{1, 2, 3\}$ dan $N = \{1, 2, 3, 4\}$.
Relasi $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2,2), (3, 3)\}$
Relasi $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
Maka :
$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{(1, 1)\}$
$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3, (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
$\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
$\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
$\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 = \{(2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

1. Operasi komposisi

Gabungan dua buah relasi yang memenuhi syarat sering kita sebut dengan operasi komposisi, misalnya jika $\mathcal{R}_1$ relasi dari *M* ke M dan $\mathcal{R}_2$ merupakan relasi dari M ke M, yang mengakibatkan relasi komposisi $\mathcal{R}_1$ dan $\mathcal{R}_2$ dapat dinyatakan dengan $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, sehingga relasi $\mathcal{R}_1$ dapat diteruskan oleh relasi

$\mathcal{R}_2$. Syarat tertentu yang dibutuhkan itu adalah jika $(1,2) \in \mathcal{R}_1$ dan $(2,3) \in \mathcal{R}_2$, maka kita peroleh hasil $(1,3) \in \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Contoh operasi komposisi :
Misalkan, $M = \{k, l, m\}$, $N = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $P = \{o, p, q\}$
Relasi dari M ke N didefinisikan oleh :
$\mathcal{R} = \{(k, 1), (k, 5), (l, 3), (m, 3), (m, 5), (m, 7)\}$
Relasi dari N ke K didefisikan oleh :
$\mathcal{T} = \{(1, q), (3, o), (3, p), (5, p), (7, q)\}$
Maka komposisi relasi $\mathcal{R}$ dan $\mathcal{T}$ adalah
$\mathcal{T}$ o $\mathcal{R} = \{(k, q), (k, p), (l, o), (l, p), (m, o), (m, p), (m, q)\}$



3.1.4 Relasi Ekuivalensi

Kita mengatakan "α berelasi $\Re$ dengan β" dapat disajikan dengan simbol "$_{\alpha}\Re_{\beta}$", beberapa buku menulisnya sebagai "$\Re(\alpha,\beta)$" untuk suatu α dan β berada dalam himpunan semesta *S.* Didefinisikan beberapa relasi sebagai berikut. Relasi ekuivalen adalah suatu relasi yang memenuhi ketiga sifat sekaligus, yaitu: refleksif, simetri, dan transitif.

Suatu relasi $\Re$ *dikatakan relasi Refleksif (reflexive) jika untuk setiap anggota semestanya berlaku* ${}_{\alpha}\Re_{\alpha}$ *yang dinotasikan dengan.*

$$\Re \text{ refleksif} \Leftrightarrow (\forall \alpha \in S)\ {}_{\alpha}\Re_{\alpha}.$$

Relasi $\Re$ *disebut Simetris (symmetric) jika dan hanya jika untuk setiap* α *dan* β *dari semesta-nya berlaku jika* ${}_{\alpha}\Re_{\beta}$ *maka* ${}_{\beta}\Re_{\alpha}$ *yang dinotasikan dengan.*

$$\Re \text{ simetris} \Leftrightarrow (\forall \alpha,\beta \in S);\ {}_{\alpha}\Re_{\beta} \Rightarrow {}_{\beta}\Re_{\alpha}.$$

Relasi $\Re$ *disebut Transitif (transitive) jika dan hanya jika untuk setiap triple* α,β,γ *dari semestanya berlaku jika* ${}_{\alpha}\Re_{\beta}$ *dan* ${}_{\beta}\Re_{\gamma}$ *maka* ${}_{\alpha}\Re_{\gamma}$ *yang dinotasikan dengan.*

$$\Re \text{ transitif} \Leftrightarrow (\forall \alpha,\beta,\gamma \in S)\ {}_{\alpha}\Re_{\beta} \wedge {}_{\beta}\Re_{\gamma} \Rightarrow {}_{\alpha}\Re_{\gamma}$$

Contoh.

Misalkan $f: S \rightarrow T$ fungsi. Untuk $x_1, x_2 \in S$ kita defenisikan

$\alpha_1 \sim \alpha_2$ jika $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$

Ambil sebarang $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S$

Maka untuk semua $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S)$ diperoleh

(i) $(\forall \alpha_1 \in S)$ berlaku:

Jika $f(\alpha_1) = f(\alpha_1) \Leftrightarrow \alpha_1 \sim \alpha_1; \Rightarrow$ memenuhi sifat refleksif

(ii) $(\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in S)$ berlaku:

jika $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow$ memenuhi sifat simetris

(iii) $(\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S)$ berlaku:

jika $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$ dan $f(\alpha_2) = f(\alpha_3)$, maka $f(\alpha_1) = f(\alpha_3)$.

Sehingga:

jika $\alpha_1 \sim \alpha_2$ dan $\alpha_2 \sim \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_3 \Rightarrow$ memenuhi sifat transitif

$\therefore$ f suatu relasi ekuivalensi pada Himpunan *S*.

Sebagai catatan: Koleksi semua kelas-kelas ekuivalen dari S atas f akan dilambangkan dengan S/f.

Contoh

Suatu fungsi f : N $\rightarrow$ N, dimana. Tunjukkan bahwa f merupakan relasi ekuivalen pada N.

Bukti:

Ambil sebarang $(\alpha, \beta, \gamma \in N)$

Maka untuk semua $(\alpha, \beta, \gamma \in N)$ diperoleh

(i) $f(\alpha) = f(\alpha)$; $(\forall \alpha \in N) \Rightarrow$ memenuhi sifat refleksif

(ii) jika $\alpha = \beta$ maka $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow$ memenuhi sifat simetris

(iii) jika $\alpha = \beta$ dan $\beta = \gamma$ maka $\alpha = \gamma$ sehingga memenuhi:
jika $f(\alpha) = f(\beta)$ dan $f(\beta) = f(\gamma)$ maka $f(\alpha) = f(\gamma) \Rightarrow$ memenuhi sifat transitif.

Dari pembuktian (*i*),(*ii*), dan (*iii*) disimpulkan bahwa f suatu relasi ekuivalen pada N.

Contoh:

M = himpunan semua persegi.

Yang didefinisikan dengan relasi "sebangun" sebagai relasi ekuvalensinya pada himpunan M.

Dapat kita tunjukkan bahwa:

M memiliki sifat refleksif.

Ambil sebarang $x \in M$ ɜ diperoleh suatu persegi sebangun dengan persegi itu sendiri.

$\therefore \forall x \in$ M akan diperoleh ${}_xM_x$

$\therefore M$ memiliki sifat refleksif

M memiliki sifat simetris.

Ambil sebarang $x,y \in M$ ɜ diperoleh suatu persegi sebangun dengan persegi lainnya.

$\therefore \forall\, x,y \in$ M akan diperoleh ${}_xM_y$

$\therefore M$ memiliki sifat simetris

M memiliki sifat transitif.

Ambil sebarang $x,y,z \in M$

Misalkan x adalah persegi 1, y adalah persegi 2, dan z adalah persegi 3, sehingga:

Jika persegi 1 sebangun dengan persegi 2 dan persegi 2 sebangun dengan persegi 3 maka persegi 1 sebangun dengan persegi 3.

$\therefore \forall\, x,y,x \in$ M akan diperoleh jika ${}_xM_y$ dan ${}_yM_z$ maka ${}_xM_z$.

$\therefore M$ memiliki sifat transitif

Jadi dapat disimpulkan bahwa M merupakan relasi ekuivalensi karena memiliki sifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh:

N = himpunan semua bilangan bulat

Jika Relasi N didefinisikan dengan "kongruen" (dilambangkan dengan "≅") dalam suatu modulo η (dimana η = bilangan asli) yang didefinisikan sbb :

$\chi \cong \gamma \pmod{\eta} \Leftrightarrow \chi - \gamma = l.\eta$, dimana $l \in Z$

Relasi ini juga merupakan relasi ekuivalensi pada N, karena:

(1) Ambil sebarang $\alpha \in Z$,

$(\forall \alpha \in Z)$ diperoleh:

$(\alpha - \alpha) = 0.\eta, \Rightarrow \alpha \cong \alpha \pmod{\eta}$

$\therefore$ N merupakan relasi kongruensi bersifat refleksif.

(2) Ambil sebarang $(\alpha,\gamma \in Z)$

$\forall(\alpha,\gamma \in Z)$ diperoleh:

$\alpha \cong \gamma$ (mod.η), maka :

$(\alpha - \gamma) = l.\eta$, $(\forall l \in Z)$

Sehingga diperoleh:

$(\alpha - \gamma) = -(l.\eta) = (-l).\eta$

Karena $l \in Z$ maka $(-l) \in Z$, sehingga:

$\alpha \cong \gamma$ (mod.η).

$\therefore (\forall \alpha,\gamma \in N).\ \alpha \cong \gamma \Rightarrow \gamma \cong \alpha$

$\therefore$ N merupakan relasi kongruensi bersifat simetris.

(3) Ambil sebarang $(\alpha,\gamma,\beta) \in Z$,

$(\forall \alpha,\gamma,\beta \in Z)$, dimana $\alpha \cong \gamma$ (mod.η) dan $\gamma \cong \beta$ (mod.η) maka diperoleh:

$\alpha - \gamma = l_1.\eta$ (l_1= bilangan bulat).

$\Leftrightarrow \gamma - z = l_2.\eta$ (l_2= bilangan bulat).

$\Leftrightarrow (\alpha - \gamma) + (\gamma - z) = l_1.\eta + l_2.\eta$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = (l_1 + l_2).\eta$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = k_3.\eta$

Kaerna $l_1,l_2 \in Z$ dan $l_3 = l_1+l_2$, maka diperoleh $l_3 \in Z$

Sehingga:

$\alpha \cong \beta$ (mod.η).

Maka $(\forall \alpha,\gamma,\beta \in A).\ \alpha \cong \gamma \wedge \gamma \cong \beta \Rightarrow \alpha \cong \beta$

$\therefore$ N merupakan relasi kongruensi yang bersifat transitif.

Dari pembuktian (1), (2), dan (3) disimpulkan bahwa himpunan N merupakan relasi ekuivalensi.

Defenisi: Misalkan **~** suatu relasi ekivalen pada himpunan S. Untuk suatu a $\in$ S, kita defenisikan **kelas ekivalen** dari a sebagai himpunan semua elemen dari S yang ekivalen dengan a. Kita akan menggunakan lambang [a] untuk kelas ekivalen,

$$[a] = \{ x \in S \mid x \sim a \}.$$

Lambang S/**~** digunakan untuk koleksi semua kelas-kelas ekuivalen dari S atas **~**.

Proposisi 1 Misalkan S suatu himpunan, dan misalkan **~** suatu relasi ekivalen pada S. maka setiap elemen dari S termuat dalam tepat satu kelas ekivalen dari S yang atas relasi **~**.

Defenisi 3 Misalkan S suatu himpunan. Suatu keluarga P dari subset-subset S dikatakan suatu partisi dari S jika setiap elemen S termuat dalam tepat satu anggota P.

***Proposisi* 2** Suatu partisi P dari suatu himpunan S menentukan suatu relasi ekivalen.

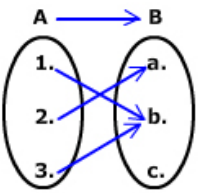
Misalkan S suatu himpunan, dan Misalkan **~** suatu relasi ekivalen pada S. Didefenisikan suatu fungsi $p : S \rightarrow S/\sim$ dengan $p(x) = [x]$, untuk semua $x \in S$. Dari proposisi 1 menunjukkan bahwa setiap elemen x dalam S termuat dalam tepat satu kelas ekivalen, sehingga ini menunjukkan bahwa p suatu fungsi, yang kita sebut sebagai **proyeksi** dari S onto S/**~**. Untuk x_1, $x_2 \in S$ diperoleh $x_1 \sim x_2$ jika dan hanya jika $p(x_1) = p(x_2)$. Ini menunjukkan bahwa p mendefenisikan relasi ekivalen **~**, sehingga keluarga S/**~** dan S/p identik.

3.2 Fungsi

3.2.1 Pengertian Fungsi

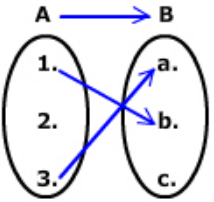
Berbicara tentang fungsi, maka kita akan berbicara tentang relasi himpunan, karena fungsi adalah sutu relasi dari suatu himpunan di domain (daerah asal) yang memetakan tepat sekali pada daerah hasil (kodomain). Kita misalkan dua buah himpuan K dan L yang masing-masing memiliki anggota yang memiliki hubungan satu sama lain, dimana relasi yang

menghubungkan antara himpunan K dengan himpunan L merupakan relasi yang memetakan setiap anggota di himpunan K tepat sekali pada anggota himpunan setiap anggota di L. Untuk memahami lebih lanjut tentang fungsi, mari kita perhatikan penjelasan gambar di bawah ini.

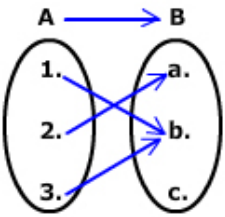


Dari gambar di atas terlihat jelas bahwa hasil pemetaannya merupakan **fungsi**, karena setiap anggota di himpunan A tepat sekali dipasangkan dengan anggota di himpunan B.

Selanjutnya perhatikan kembali gambar berikut.



Gambar di atas adalah bukan fungsi, sebab ada anggota himpunan A yaitu 2 yang tidak dipasangkan dengan anggota B dari gambar hasil penelusuran kita terhadap gambar di atas, kita peroleh:



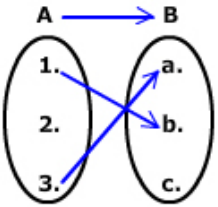
Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah = {(1,b), (2,a), (3,b)}

Daerah asal, daerah kawan dan daerah hasil dari relasi himpunan A ke himpunan B untuk gambar di atas adalah:

Daerah asal : R_f = Himpunan A
= {1, 2, 3}

Daerah kawan : = Himpunan B
= {a, b, c}

Daerah hasil : D_f = {a, b,}



Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah = {(1,b), (3,a)}

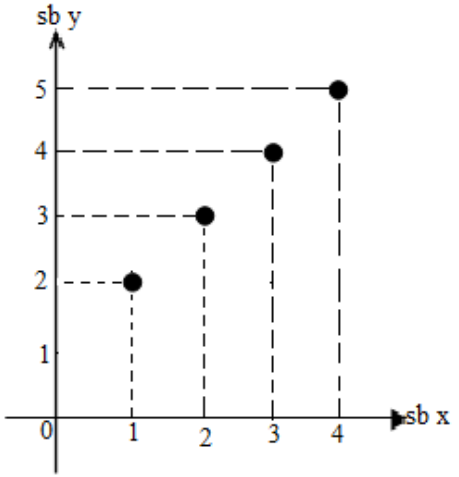
Daerah asal, daerah kawan dan daerah hasil dari relasi himpunan A ke himpunan B untuk gambar di atas adalah:

Daerah asal : R_f = Himpunan A
= {1, 2, 3}

Daerah kawan : = Himpunan B
= {a, b, c}

Daerah hasil : D_f = {a, b,}

Selanjutnya perhatikan Grafik berikut:



Dari grafik di atas dapat kita katakan bahwa grafik tersebut merupakan contoh grafik fungsi karena untuk setiap elemen di sumbu x dipasangkan tepat satu pada elemen di sumbu y.

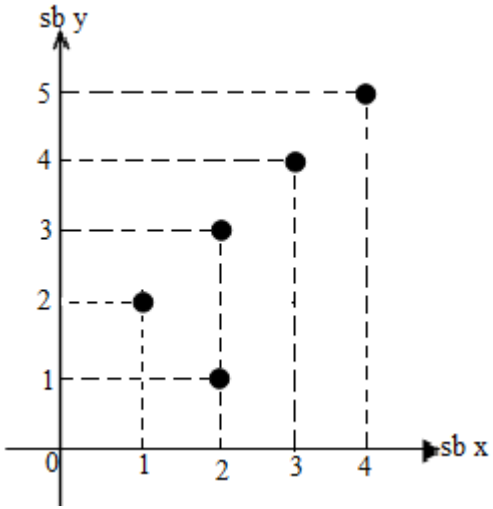
Daerah asal (domain) dari grafik tersebut adalah $R_f = \{x| 1 \leq x \leq 4\}$

Daerah kawan (kodomain) dari grafik tersebut adalah $\{y| 1 \leq y \leq 5\}$

Daerah hasil dari grafik tersebut adalah $D_f = \{y| 2 \leq y \leq 5\}$

Pasangan berurut yang dibentuk oleh grafik di atas adalah $\{(x,y)|(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

Perhatikan juga grafik 1.2 berikut.



Dari grafik 1.2 di atas dapat kita katakan bahwa grafik tersebut merupakan non-contoh grafik fungsi karena ada elemen di sumbu x dipasangkan dua kali dengan elemen di sumbu y.

Daerah asal (domain) dari grafik tersebut adalah $R_f = \{x| 1 \leq x \leq 4\}$

Daerah kawan (kodomain) dari grafik tersebut adalah $\{y| 1 \leq y \leq 5\}$

Daerah hasil dari grafik tersebut adalah $D_f = \{y| 1 \leq y \leq 5\}$

Pasangan berurut yang dibentuk oleh grafik di atas adalah $\{(x,y)|(1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

Dari keterangan di atas dapat kita definisikan tentang fungsi.

Definisi:

Suatu relasi $f : K \rightarrow L$ dikatakan fungsi bila dan hanya bila untuk setiap α anggota di K (domain) dipasangkan tepat satu kali di y anggota di L (kodomain) sehingga memiliki daerah hasil (range) R_f, dinotasikan dengan:

$f : K \rightarrow L$ maka f dikatakan fungsi $\Leftrightarrow (\forall \alpha \in K)\ (\exists! \beta \in L)\ \ni\ f(\alpha) = \beta$.

Perhatikan bahwa suatu relasi f dari K ke L adalah suatu relasi yang mempunyai dua sifat khusus, yaitu:

a. Untuk setiap anggota di domain (himpunan K) selalu dipetakan tepat sekali pada anggota di kodomain (himpunan L), sehingga seluruh anggota di daerah asal semuanya dipasangkan (yang sering kita kenal dengan "anggota di daerah asal habis dipasangkan")
b. Pasangan setiap anggota di himpunan K bersifat "tunggal", yang disimbolkan dengan:
   $(\forall \alpha_1, \alpha \in K).\ \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$

Secara umum, jika f adalah suatu fungsi yang mana $f : K \rightarrow L$, maka akan ditemukan bahwa tidak semua anggota dari himpunan L (daerah kawan) mempunyai pasangan atau dengan kata lain, akan ada suatu $\beta \in L$ tidak memiliki pasangan. Selain itu, juga akan ada kemungkinan satu anggota di daerah kawan ($\beta \in L$) memiliki pasangan lebih dari satu. Jadi dapat kita simpulkan bahwa pasangan anggota di himpunan L itu tidak harus tunggal.

Contoh.

Perhatikan relasi berikut:

a. $f : R_1 \rightarrow R_2$ dimana $f(x) = 2x$
b. $g : Q_1 \rightarrow Q_2$ dimana $g(x) = x^2$.
c. $h : [-4,4] \rightarrow [0,20]$ dimana $h(x) = x^2 + 2$
d. $j : [-2,2] \rightarrow [-4,4]$ dimana $j(x) = 2x+1$

selidiki apakah relasi di atas merupakan fungsi?

Selesaian.

a. $f : R_1 \rightarrow R_2$ dimana $f(x) = 2x$

   Untuk menyelidiki apakah relasi $f : R_1 \rightarrow R_2$ dimana $f(x) = 2x$ merupakan fungsi, maka perlu kita tunjukkan, $\Leftrightarrow (\forall x \in R_1)\ (\exists! y \in R_2)\ \ni\ f(x) = y$.

   Ambil sebarang $x \in R_1$.

$(\forall x \in R_1)$ akan diperoleh:

$y = 2x \in R_2 \Leftrightarrow f(x) = y$.

$\therefore (\forall x \in R_1)(\exists! y \in R_2) \ni f(x) = y$.

$\therefore f$ merupakan fungsi.

b. $g: Q_1 \rightarrow Q_2$ dimana $g(x) = x^2$.

Untuk menyelidiki apakah relasi $g: Q_1 \rightarrow Q_2$ dimana $g(x) = x^2$ merupakan fungsi, maka perlu kita tunjukkan, $\Leftrightarrow (\forall x \in Q_1)\ (\exists! y \in Q_2) \ni f(x) = y$.

Ambil sebarang $x \in Q_1$.

$(\forall x \in Q_1)$ akan diperoleh:

$y = x^2 \in Q_2 \Leftrightarrow g(x) = y$.

$\therefore (\forall x \in Q_1)(\exists! y \in Q_2) \ni g(x) = y$.

$\therefore g$ merupakan fungsi.

c. $h: [-4,4] \rightarrow [0,20]$ dimana $h(x) = x^2 + 2$

Untuk menyelidiki apakah relasi $h: [-4,4] \rightarrow [0,20]$ dimana $h(x) = x^2 + 2$ merupakan fungsi, maka perlu kita tunjukkan, $\Leftrightarrow (\forall x \in [-4,4])\ (\exists! y \in [0,20]) \ni f(x) = y$.

Ambil sebarang $x \in [-4,4]$

$(\forall x \in [-4,4])$ akan diperoleh:

$y = x^2 + 2 \in [0,20] \Leftrightarrow h(x) = y$.

$\therefore (\forall x \in [-4,4])(\exists! y \in [0,20]) \ni h(x) = y$.

$\therefore h$ merupakan fungsi.

d. $j: [-2,2] \rightarrow [-4,4]$ dimana $j(x) = 2x+1$

Untuk menyelidiki apakah relasi $h: [-2,2] \rightarrow [-4,4]$ dimana $h(x) = x^2 + 2$ merupakan fungsi, maka perlu kita tunjukkan, $\Leftrightarrow (\forall x \in [-2,2])\ (\exists! y \in [-4,4]) \ni j(x) = y$.

Ambil sebarang $x \in [-2,2]$

Ternyata $\exists x = 2 \in [-2,2] \ni$

$y = 5 \notin [-4,4]$

$\therefore j$ bukan fungsi.

Contoh

Buktikan bahwa relasi $k : R \rightarrow Q$ dimana $k(t) = t$, maka k bukan fungsi.

Bukti

Andai k merupakan fungsi.

Relasi $k : R \rightarrow Q$ k dikatakan fungsi jika dan hanya jika $(\forall t \in R)(\exists! r \in Q) \ni k(t) = r$

Ambil sebarang $t \in R$

Ternyata $\exists\, t = \sqrt{2} \in R \ni r = \sqrt{2} \notin Q$

hal ini bertentangan dengan pengandaian

berarti pengandaian salah, haruslah k bukan fungsi.

$\therefore$ Relasi $k : R \rightarrow Q$ dimana $k(t) = t$, bukan fungsi.

Dari contoh di atas, mungkin kiat sudah mengerti konsep dasar matematis dari fungsi. Namun, untuk lebih memantapkan pemahaman kita mari kita lihat contoh lain berikut.

Contoh.

Suatu relasi.

a. $f : R \rightarrow Z$ dimana $y = 2x+3$
b. g: $[-4,4] \rightarrow [-4,4]$ dimana $y^2 + x^2 = 16$
c. h: $R_1 \rightarrow R_2$ dimana $y = x^2 + 2x + 1$

Selidiki apakah relasi terbut merupakan fungsi?

Selesaian.

Sebagaimana telah dijelaskan pada contoh di atas, bahwa untuk menunjukkan suatu relasi $f : A \rightarrow B$ maka f dikatakan fungsi perlu ditunjukkan $(\forall x \in A)\ (\exists! y \in B) \ni f(x) = y$.

Sehingga.

a. $f : R \rightarrow Z$ dimana $y = 2x+3$, merupakan fungsi perlu diselidiki $(\forall x \in R)\ (\exists! y \in Z) \ni f(x) = y$.

   Ambil sebarang $x \in R$.

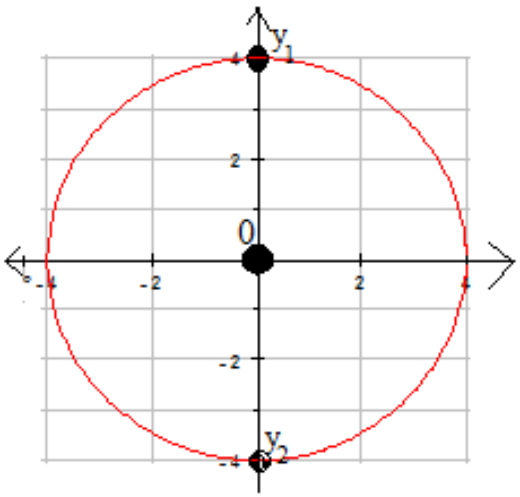
Ternyata ($\exists x = \frac{1}{5} \in R$) sehingga diperoleh:

$y = \frac{2}{5} + 3 \notin Z \Leftrightarrow f(x) \neq y$.

$\therefore (\forall x \in R_1)(\exists! y \in R_2) \ni f(x) = y$.

$\therefore f$ bukan suatu fungsi.

b. g: [-4,4]→[-4,4] dimana $y^2 + x^2 = 16$, merupakan fungsi maka perlu diselidiki $(\forall x \in [-4,4])$ $(\exists! y \in [-4,4]) \ni f(x) = y$.
Ambil sebarang $x \in [-4,4]$
Ternyata $(\exists x=0 \in [-4,4]) \ni$ diperoleh $y_1 = -4$ dan $y_2 = 4$ sehingga $f(x) \neq y$.
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



$\therefore g$: [-4,4]→[-4,4] dimana $y^2 + x^2 = 16$, bukan fungsi

c. h: $\Re_1 \rightarrow \Re_2$ dimana $y = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ merupakan fungsi maka perlu diselidiki $(\forall \alpha \in R_1)$ $(\exists! \gamma \in \Re_2 \ni h(\alpha) = \gamma$.
Ambil sebarang $x \in \Re_1$.
$(\forall \alpha \in \Re_1)$ akan diperoleh:

$y = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \Leftrightarrow h(\alpha) = \gamma$.

$\therefore (\forall \alpha \in \Re_1)(\exists! \gamma \in \Re_2) \ni h(\alpha) = \gamma$.

$\therefore$ h merupakan fungsi.

3.2.2 Kesamaan dua buah fungsi

Dua buah fungsi $g : \Re_1 \to \Re_2$ dan $h : \Re_1 \to \Re_2$ dikatakan sama jika kedua fungsi itu mengkaitkan anggota-anggota dari daerah asalnya dengan anggota- anggota yang sama di daerah kawannya.

$$g = h \Leftrightarrow (\forall t \in \Re_1). \quad g(t) = h(t)$$

Contoh :

$f : \Re_1 \to \Re_2$ dengan $l(t) = (t-2)^2 - (2t-2)$, dan $k : \Re_1 \to \Re_2$ dengan $g(t) = t^2 - 6t + 6$

fungsi $l = k$ karena:

$l(t) = (t-2)^2 - (t-2) = t^2 - 4t + 4 - 2t + 2 = t^2 - 6t + 6 = k(t)$, maka $l = k$

3.2.3 Jenis-Jenis Fungsi

a. Fungsi Injektif

Definisi: Suatu fungsi f dikatakan fungsi injektif jika:

1. Jika $t_1 \neq t_2$ maka $f(t_1) \neq f(t_2)$; $(\forall t_1, t_2 \in T)$ atau
2. Jika $f(t_1) = f(t_2)$ maka $t_1 = t_2$; $(\forall t_1, t_2 \in T)$

Contoh.

Perhatikan fungsi berikut.

a. $f : \Re_1 \to \Re_2$; $f(t) = t^2 + 2t$

b. $g : \Re_1 \to \Re_2$; $g(t) = 2t + 3$

selidiki mana yang merupakan fungsi injektif.

Selesaian

a. $f : \Re_1 \to R_2$; $f(t) = t^2 + 2t$.

Ambil sebarang $t_1, t_2 \in \Re_1$.

Ternyata ada $t_1 \neq t_2$ yaitu $t_1 = -2 \in \Re_1$ dan $t_2 = 0 \in \Re_1$ tetapi $f(t_1) = f(t_2) = 0 \in \Re_2$

$\therefore f : \Re_1 \rightarrow \Re_2; f(t) = t^2 + 2t$ bukan fungsi Injektif.

b. $g : \Re_1 \rightarrow \Re_2; g(t) = 2t + 3$

ambil sebarang $t_1, t_2 \in \Re_1$.

$\forall t_1, t_2 \in \Re_1$; jika $t_1 \neq t_2$ maka $g(t_1) \neq g(t_2)$

$\therefore g : \Re_1 \rightarrow \Re_2; g(t) = 2t + 3$ Fungsi Injektif

Selanjutnya untuk lebih memantafkan pemahaman kita tentang fungsi injektif ini, mari kita pahami lagi contoh berikut ini.

Contoh.

Suatu fungsi yang direlasikan dari himpunan bilangan R_1 ke R_2 didefinisikan dengan:

a. $g(s) = s^3 - 2$
b. $f(s) = s^2 + 2$

selidikilah apakah fungsi tersebut merupakan fungsi injektif?

Selesaian.

a. Untuk menunjukkan suatu fungsi $g(s) = s^3 - 2$ merupakan fungsi injektif, maka akan ditunjukkan Jika $s_1 \neq s_2$ maka $f(s_1) \neq f(s_2)$; $(\forall s_1, s_2 \in \Re_1)$ atau Jika $f(s_1) = f(s_2)$ maka $s_1 = s_2$; $(\forall s_1, s_2 \in \Re 1)$.

   Ambil sebarang $s_1, s_2 \in \Re_1$

   Sehingga diperoleh:

   $g(s_1) = s_1^3 - 2$ dan $g(s_2) = s_2^3 - 2$

   karena $g(s_1) = g(s_2)$ maka akan berakibat

   $s_1^3 - 2 = s_2^3 - 2$

   $\Leftrightarrow s_1^3 = s_2^3$

   $\Leftrightarrow s_1 = s_2$

   Jadi, fungsi $g(s)$ adalah **Fungsi injektif**

b. Untuk menunjukkan suatu fungsi $g(s) = s^2 + 2$ merupakan fungsi injektif, maka akan ditunjukkan Jika $s_1 \neq s_2$ maka $f(s_1) \neq f(s_2)$; $(\forall s_1, s_2 \in \Re_1)$ atau Jika $f(s_1) = f(s_2)$ maka $s_1 = s_2$; $(\forall s_1, s_2 \in \Re_1)$.

Ambil sebarang $s_1, s_2 \in \Re_1$

Sehingga diperoleh:

$g(s_1) = s_1^2 + 2$ dan $g(s_2) = s_2^2 + 2$

karena $g(s_1) = g(s_2)$ maka akan berakibat

$s_1^2 + 2 = s_2^2 + 2$

$\Leftrightarrow s_1^2 = s_2^2 \Leftrightarrow s_1 = s_2$

Jadi, fungsi $g(s)$ adalah **Fungsi injektif**.

b. Fungsi Surjektif

Definisi: Suatu fungsi f dikatakan fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap t anggota di kodomain memiliki pasangan s anggota di domain, dinotasikan dengan:

$f: \mathrm{K} \rightarrow \mathrm{L}$ dikatakan fungsi surjektif ini:

$(\forall t \in \mathrm{K})(\exists \mathrm{s} \in \mathrm{L}) \ni f(s) = \mathrm{t}$.

Contoh

Perhatikan fungsi berikut.

a. $f: \Re_1 \rightarrow \Re_2; f(s) = s^2 + 2s$

b. $g: \Re_1 \rightarrow \Re_2; g(s) = 2\mathrm{s} + 3$

selidiki mana yang merupakan fungsi surjektif.

Selesaian

$f: \Re_1 \rightarrow \Re_2; f(s) = s^2 + 2s$.

Ambil sebarang $t \in \Re_2$.

Ternyata $\exists t = -2 \in \Re_2 \ni -2 = s^2 + 2s$

$\Leftrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0$ tidak memiliki solusi penyelesaian di $s \in \Re_1$.

$\therefore (\exists\, \mathrm{t} = -2 \in \Re_2) \ni (s = i \notin \Re_1)$

$\therefore f : R_1 \rightarrow R_2; f(s) = s^2 + 2s$bukan fungsi surjektif.

Yang menjadi pertanyaan kembali bagi kita, apakah kita sudah benar-benar paham tentang fungsi surjektif ini? Untuk lebih memantapkan pemahaman kita tentang fungsi surjektif ini, mari kita lihat lagi contoh berikut ini.

Contoh.

Suatu fungsi yang direlasikan dari himpunan bilangan R_1 ke R_2 didefinisikan dengan:

a. $f(s) = s^2 - 1$

b. $g(s) = 3s - 5$.

selidikilah apakah fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif?

Selesaian.

a. $f : \Re_1 \rightarrow R_2$, dengan $f(s) = s^2 - 1$

   Akan ditunjukkan f fungsi surjektif $\Leftrightarrow (\forall t \in \Re_2)(\exists s \in \Re_1)$ ə $f(s) = t$.

   Ambil sebarang $t \in \Re_2$.

   Ternyata $(\exists\ t = -2 \in \Re_2)$ ə untuk $f(s) = t$ diperoleh:

   $s^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow s^2 = -1$

   $\Leftrightarrow s = \sqrt{-1} \notin \Re_1$

   $\therefore (\exists\ t \in \Re_2)$ ə diperoleh $s = \sqrt{-1} \notin \Re_1$.

   $\therefore f : \Re_1 \rightarrow \Re_2$, dengan f(x) $= s^2 - 1$ bukan fungsi surjektif.

   Dari contoh ini dapat kita katakana juga bahwa fungsi parabola ini fungsi parabola terbuka ke bawah, di mana pada garis vertikal $t \geq -2$ setiap titik t pada sumbu koordinat cartesius, tidak memiliki pasangan di s pada garis horzontal.

b. $g : \Re_1 \rightarrow \Re_2$, dengan g(x) $= 3s - 5$.

   Akan ditunjukkan g fungsi surjektif $\Leftrightarrow (\forall t \in \Re_2)(\exists s \in \Re_1)$ ə $g(s) = t$.

   Ambil sebarang $t \in \Re_2$.

$(\forall t \in \Re_2)$ akan diperoleh:

$t = 3s - 5 = f(x)$

$\therefore (\forall t \in \Re_2)(\exists\, s \in \Re_1) \ni g(s) = t.$

$\therefore\ g : \Re_1 \rightarrow \Re_2$, dengan g(s) = 3s – 5 fungsi surjektif.

Atau kita juga bisa dengan cara mendaftarkan terlebih dahulu pemetaannya :

$g(-1) = 3(-1) - 5 = -8 \in \Re_2$.

$g(0) = 3(0) - 5 = -5 \in \Re_2$.

$g(1) = 3(1) - 5 = -2 \in \Re_2$.

$R_f = \{-8, -5, -2\} = \Re_2$.

Karena $R_f = \Re_2$, maka $g(x)$ merupakan **Fungsi Surjektif**.

c. Fungsi Bijektif

Suatu fungsi f dikatakan fungsi surjektif jika merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif.

Contoh.

Apakah fungsi $f:\{k,l,m,n\} \rightarrow \{p,q,r,s\}$ dengan $f(k)= s$, $f(l)= q$, $f(m)=p$ dan $f(n)=r$ bijektif.

Selesaian:

Karena semua anggota pada $\{k,l,m,n\}$ berpasangan tepat sekali di $\{p,q,r,s\}$ dan semua anggota di $\{p,q,r,s\}$ habis berpasangan, maka f merupakan fungsi bijektif.

Untuk memantapkan pengetahuan kita tentang fungsi bijektif pada suatu fungsi yang direlasikan dari satu himpunan R_1 ke himpunan R_2, mari kita lihat contoh berikut ini.

Contoh.

Suatu fungsi yang direlasikan dari himpunan bilang rill ke himpunan bilangan rill lainnya, didefinisikan dengan:

a. $f(t) = 2t$
b. $g(t) = t^2$.

Buktikan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif.

Bukti.

a. Karena $f(t)= 2t$ merupakan fungsi yang direlasikan dari himpunan bilang rill ke himpunan bilangan rill, maka untuk menunjukkan bahwa $f(t) = 2t$ merupakan fungsi bijektif, maka akan ditunjukkan bahwa $f(t) = 2t$ merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif, sehingga:
   Untuk $f(t) = 2t$ merupakan fungsi injektif.
   Ambil sebarang $t_1, t_2 \in \Re_1$
   Untuk setiap $t_1, t_2 \in \Re_1$, pada fungsi $f(t) = 2t$, akan diperoleh:
   Jika $t_1 \neq t_2$ maka $f(t_1) \neq f(t_2)$ atau
   Jika $f(t_1) = f(t_2)$ maka $t_1 = t_2$
   $\therefore$ fungsi $f(t) = 2t$ merupakan fungsi injektif
   Selanjutnya untuk $f(t)= 2t$ merupakan fungsi surjektif akan kita tunjukkan $(\forall s \in \Re_2)\ (\exists t \in \Re_1)\ \ni f(t) = s$.
   Ambil sebarang $y \in R_2$
   $(\forall s \in \Re_2)$ akan kita peroleh $(\exists t \in \Re_1)\ \ni f(t) = s$.
   $\therefore f(t) = 2t$ merupakan fungsi surjektif
   Karena $f(t) = 2t$ merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif, maka fungsi $f(t) = 2t$ merupakan fungsi bijektif.

b. Karena $g(t) = t^2$ merupakan fungsi yang direlasikan dari himpunan bilang rill ke himpunan bilangan rill, maka untuk menunjukkan bahwa $g(t) = t^2$ merupakan fungsi bijektif, maka akan ditunjukkan bahwa $g(t) = t^2$ merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif, sehingga:
   Untuk $g(t) = t^2$ merupakan fungsi injektif.
   Ambil sebarang $t_1, t_2 \in \Re_1$
   Untuk setiap $t_1,t_2 \in R_1$, pada fungsi $g(t) = t^2$, akan diperoleh:
   Jika $t_1 \neq t_2$ maka $f(t_1) \neq f(t_2)$ atau
   Jika $f(t_1) = f(t_2)$ maka $t_1 = t_2$

$\therefore$ fungsi $g(t) = t^2$ merupakan fungsi injektif

Selanjutnya untuk $g(t) = t^2$ merupakan fungsi surjektif akan kita tunjukkan $(\forall s \in \Re_2)\ (\exists t \in \Re_1)\ \ni f(t) = s$.

Ambil sebarang $s \in \Re_2$

Ternyata $\exists s = -2 \in \Re_2 \ni -2 = t^2$

$\Leftrightarrow t^2 - 2 = 0$ tidak memiliki solusi penyelesaian di $t \in \Re_1$.

$\therefore (\exists\ s = -2 \in \Re_2) \ni (t = i \notin \Re_1)$

$\therefore f : \Re_1 \rightarrow \Re_2; f(t) = t^2$ bukan fungsi surjektif.

Karena $f(t) = t^2$ bukan merupakan fungsi surjektif, maka fungsi $f(t) = 2t$ bukan merupakan fungsi bijektif

d. Fungsi Tangga

Suatu fungsi bilangan rill disebut fungsi langka atau fungsi tangga dalam bidang matematika adalah jika relasi pemetaannya dapat ditulis dalam simbol matematika dari kombinasi linier hingga fungsi indicator interval. Secara informal, dapat kita katakana bahwa fungsi langka adalah fungsi konstan sepenggal hanya memiliki himpunan finit yang banyak. Secara gampang, fungsi tangga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Defines.

Sebuah relasi $f : \Re \rightarrow \Re$ disebut sebagai fungsi tangga, didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \sum \alpha_i X_{Ai}(x);\ \forall x \in \Re,$$

Dimana $n \geq 0$, adalah bilangan riel, A_i adalah interval, dan X_A merupakan indicator fungsi A:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & jika\ x \in A \\ 0 & jika\ x \notin A \end{cases}$$

Dalam defines ini, interval A_i diasumsikan dengan dua sifat, yaitu:

1. Interval adalah disjoint, $A_i \cap A_j = \varnothing$; dimana $I \neq j$
2. Gabungan dari interval adalah garis sepenuhnya, $\cup_{i=0}^{n} A_i = R$

Andai kondisi yang satu tidak ditemukan maka untuk memulai penyelidikan, maka dapat digunakan satu set interval lain yang sifatnya berbeda secara terus menerus. Sebagai contoh, fungsi tangga:

$$f = 4_{x_{[-5,1)}} + 3_{x_{(0,6)}}$$

Dapat ditulis:

$$f = 0_{x_{(-\infty,-5)}} + 4_{x_{[-5,0)}} + 7_{x_{(0,1)}} + 3_{x_{[-1,6)}} + 0_{x_{(6,\infty)}}$$

Contoh:

1. Suatu fungsi konstan merupakan satu contoh kecil dari fungsi tangga, dimana fungsi ini hanya memiliki satu interval, $K_0 = \Re$
2. Fungsi Heaviside yang dinotasikan dengan $H(x)$ merupakan fungsi tangga penting, karena konsep matematika yang dimiliki fungsi merupakan fungsi kebalikan yang berada dibalik beberapa tes sinyal, sebagaimana telah digunakan saat penentuan langkah sistem respon dinamik.
3. Contoh sederhana fungsi tangga, yang dapat digunakan sebagai model perancangan unit pulsa adalah fungsi kotak (*square fungtion*) dan fungsi gerbong normal (*trains fungtion*)

Contoh:
Pada fungsi integer bagian, dimana tidak termasuk fungsi tangga (karena fungsi ini tidak memiliki interval dalam suatu batasan himpunan semesta tertentu fungsi ini ada ditemukan sebagai fungsi tangga) dengan jumlah tak terbatas, merupakan fungsi tangga.
Sifat-sifat fungsi tangga pada fungsi integer bagian adalah:

1. Memiliki jumlah produk dari dua fungsi langkah (termasuk dalam kategori fungsi tangga), karena hasil produk dari sebuah fungsi tangga dengan angka juga termasuk fungsi tangga, dimana dapat kita simpulkan bahwa fungsi tangga merupakan fungsi aljabar atas bilangan rill.
2. Sebuah fungsi tangga hanya mengambil sejumlah nilai yang terbatas pada interval bilangan rill. Jika interval A_i , dimana i = (0,n) maka sesuai definisi di atas akan diperoleh bahwa A_i merupakan suatu fungsi tangga yang terurai dan koleksi keanggotaannya adalah merupakan suatu garis yang nyata, sehingga diperoleh nilai $f(x) = \alpha_i$, $\forall x \in A_i$.

Fungsi invertible

1. Carilah $f^{-1}(x)$ jika $f : \Re_1 \rightarrow \Re_2$ dengan $f(x) = 2x - 4$

   Penyelesaian:

   misal : $f(x) = y$

   $y = 2x - 4$

   $y + 4 = 2x$

   $1/2\, y + 2 = x$

   Karena $x = f^{1}(y)$

   $1/2\, y + 2 = f^{-1}(y)$

   Jadi, $f^{1}(x) = 1/2\, x + 2$

   Komposisi 2 buah fungsi

   Diperoleh dua buah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah masing-masing didefinisikan dengan:

   $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = x + 2$

Tentukan:
a) $(f \text{ o } g)(x)$
b) $(g \text{ o } f)(x)$
Selesaian
a. $(f \text{ o } g)(x)$
langkah pertama yang kita lakukan adalah:
Mensubstitusi nilai $g(x)$ ke dalam $f(x)$
sehingga diperoleh:
$(f \text{ o } g)(x) = f(\, g(x)\,)$
$\Rightarrow = \; f(x+2)$
$\Rightarrow = \; 3(x+2)-2$
$\Rightarrow = 3x + 6 - 2$
$\Rightarrow = 3x + 4$

b. (g o f)(x)
Sama halnya dengan contoh di atas, yang pertama kita lakukan adalah:
Mensubstitusi nilai $f(x)$ ke dalam $g(x)$
sehingga diperoleh:
(g o f)(x) = g (f (x))
$\Rightarrow = \; g(3x-2)$
$\Rightarrow = (3x-2)+2$
$\Rightarrow = 3x$

Fungsi logaritma

Fungsi logaritma sering kali digunakan oleh khalayak ramai, seperti dalam menghitung kadar asam oleh ahli kimia, menghitung intensitas bunya oleh ahli fisika, menghitung bunga majemuk oleh ahli ekonomi dan masih banyak lagi contoh lainnya. Mereka sering menentukan nilai fungsi logaritma dalam suatu persamaan dan bentuk grafik fungsi logaritma. Berbicara tentang fungsi logaritma, perhatikan beberapa contoh berikut.

1. Nilai dari $^{3}\log. 27 + {}^{5}\log. 125 = \ldots.$
   Jawab:

$= {}^{3}\log.\ 27 + {}^{5}\log.\ 125$
$= {}^{3}\log.\ 3^{3} + {}^{5}\log.\ 5^{3}$
$= 3 + 3$
$= 6$

2. Nilai dari ${}^{3}\log\ (9 \times 27) = ...$

   Jawab:
   $= {}^{3}\log.\ 9 + {}^{3}\log.\ 27$
   $= {}^{3}\log.\ 3^{2} + {}^{3}\log.\ 3^{3}$
   $= 2 + 3$
   $= 5$

3. log. 3 = 0,477 dan log. 6 = 0,778
   Nilai log. 9 + log. 27 + log. 36 = ...
   Diketahui: log. 3 = 0,477 dan log. 6 = 0,778
   Sehingga:
   $= \log.\ 9 + \log.\ 27 + \log.\ 36$
   $= \log.\ 3^{2} + \log.\ 3^{3} + \log.\ 6^{2}$
   $=2 \log.\ 3 + 3.\ \text{Log.}\ 3 + 2.\ \text{Log.}\ 6$
   $= 2.(0,477) + 3.(0,477) + 2.(0,778)$
   $= 5.(0,477) + 2.(0,778)$
   $= 2,385 + 1,556$
   $= 3,941.$

BAB 4
KOMBINATORIKA DAN PRINSIP PIGEONHOLE

Oleh Mik Salmina

4.1 Pendahuluan

Matematika diskrit memiliki banyak cabang yang memainkan peran penting dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang fundamentalnya adalah kombinatorika yang berfokus pada penghitungan, pengaturan, dan pengelompokan objek-objek dalam suatu himpunan. Kombinatorika digunakan dalam berbagai aplikasi, seperti kriptografi, analisis algoritma, dan kecerdasan buatan.

Salah satu konsep penting dalam kombinatorika adalah **Prinsip Pigeonhole**, yang sederhana namun sangat kuat dalam membuktikan berbagai teorema. Prinsip ini menyatakan bahwa jika objek ditempatkan ke dalam kotak, maka setidaknya ada satu kotak yang berisi lebih dari satu objek. Prinsip ini memiliki banyak aplikasi dalam matematika dan ilmu komputer.

Dalam bab ini, kita akan mengeksplorasi konsep dasar kombinatorika, prinsip-prinsip pentingnya, serta bagaimana prinsip pigeonhole dapat digunakan untuk menyelesaikan

berbagai permasalahan kombinatorial (Aleja & Criado, 2022; Keevash et al., 2023).

4.2 Kombinatorika

Kombinatorika adalah cabang matematika yang mempelajari cara menghitung, menyusun, dan mengatur objek dalam suatu himpunan yang sering kali dengan mempertimbangkan aturan tertentu. Kombinatorika digunakan dalam berbagai bidang, seperti teori graf, probabilitas, dan analisis algoritma. Beberapa konsep utama dalam kombinatorika meliputi permutasi dan kombinasi.

4.2.1 Permutasi

Permutasi adalah susunan dari suatu himpunan objek-objek yang berbeda dengan susunan yang teratur dari objek-objek tersebut (memperhatikan urutan). Sebuah susunan r elemen suatu himpunan disebut permutasi-r (Rosen, 2012).

Definisi

Untuk bilangan bulat n dan r, n > 1, 0 < r < n, simbol P(n, r) didefinisikan oleh P(n, 0) = 1 dan, untuk r > 0,

$$P(n,r) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}_{r \text{ faktor}}.$$

Contoh

$P(6,2) = 6 \,.\, 5 = 30$ (dua faktor pertama dari 6!)

$P(7,3) = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 = 210$ (tiga faktor pertama dari 7!)

$P(12,0) = 1$, dan sebagainya.

Preposisi

Diketahui bilangan asli r dan n dengan r < n, banyaknya cara menempatkan r kelereng berbeda warna ke dalam n kotak bernomor, paling banyak satu kelereng dalam satu kotak, adalah P(n, r).

Perhatikan

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}_{=\,n!}\underbrace{(n-r)(n-r-1)\dots(3)(2)(1)}$$

$P(n,r)$ $(n-r)!$

Dengan demikian,

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

rumus yang berlaku juga untuk r = 0 dan r = n karena P(n, 0) = 1 dan
0! = 1.

Contoh

1. Berapa banyak cara untuk memilih pemenang hadiah pertama, pemenang hadiah kedua, dan hadiah ketiga pemenang dari 100 orang berbeda yang telah mengikuti kontes?

   Solusi: Dalam konteks sebuah kontes yang diikuti oleh 100 orang, kita ingin menentukan pemenang untuk

hadiah pertama, kedua, dan ketiga secara berurutan. Karena posisi setiap pemenang (hadiah pertama, kedua, dan ketiga) berbeda dan penting, maka urutan pemilihan sangat berperan. Dengan demikian, masalah ini merupakan kasus permutasi, di mana kita memilih dan mengatur tiga elemen dari 100 peserta. Secara matematis, jumlah cara memilih tiga pemenang tersebut dapat dihitung dengan rumus permutasi:

$$P(100,3)=100\times99\times98=970.200$$

Dengan demikian, terdapat **970.200 cara** yang berbeda untuk menentukan pemenang hadiah pertama, kedua, dan ketiga.

2. Seorang pramuniaga harus mengunjungi delapan kota yang berbeda. Diketahui bahwa kota pertama telah ditentukan sebagai titik awal perjalanannya, sedangkan urutan kunjungan ke tujuh kota sisanya bersifat fleksibel dan dapat diatur secara sewenang-wenang. Pertanyaan yang muncul adalah berapakah banyak kemungkinan urutan kunjungan yang dapat disusun oleh pramuniaga tersebut?

   Solusi: Karena kota pertama sudah ditetapkan, permasalahan ini direduksi menjadi pengaturan urutan kunjungan untuk tujuh kota yang tersisa. Banyaknya kemungkinan susunan kunjungan tersebut sama dengan jumlah permutasi dari tujuh elemen. Secara matematis, hal ini dapat dihitung dengan menggunakan rumus faktorial:

$$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$$

Dengan demikian, terdapat **5040 cara** berbeda bagi pramuniaga untuk menyusun urutan kunjungan ke kota-kota tersebut.

Sebagai ilustrasi tambahan, misalkan pramuniaga ingin menentukan rute dengan jarak total minimum. Untuk mencapai tujuan tersebut, ia harus menghitung jarak total untuk masing-masing dari 5040 kemungkinan urutan kunjungan dan kemudian memilih rute yang memberikan jarak terpendek. Pendekatan ini menekankan pentingnya pemahaman terhadap kombinatorialitas dalam permasalahan optimisasi rute.

Pendekatan analitis seperti ini tidak hanya relevan dalam studi matematika, tetapi juga memiliki aplikasi praktis dalam bidang logistik dan manajemen operasional, di mana pengambilan keputusan yang optimal sering kali bergantung pada evaluasi menyeluruh terhadap seluruh kemungkinan solusi.

3. Berapa banyak permutasi huruf-huruf ABCDEFGH yang memuat substring "ABC"?

   Solusi: Karena huruf-huruf "ABC" harus muncul sebagai satu blok yang utuh, kita dapat menganggap blok tersebut sebagai satu objek. Sehingga, kita memiliki enam objek yang akan dipermutasikan, yaitu blok "ABC" serta huruf-huruf individual D, E, F, G, dan H. Jumlah permutasi keenam objek tersebut adalah:

   $$6!=720$$

   Jadi, terdapat **720 permutasi** huruf-huruf ABCDEFGH di mana substring "ABC" muncul sebagai blok.

4.2.2 Kombinasi

Kombinasi dari suatu himpunan objek adalah himpunan bagian dari objek-objek tersebut. Himpunan bagian yang terdiri dari $\boldsymbol{r}$ objek disebut sebagai rekombinasi atau kombinasi dari objek-objek tersebut yang diambil sebanyak $\boldsymbol{r}$ dalam satu waktu(Thoery et al., 2002).

Dengan kata lain, kombinasi adalah cara memilih sejumlah objek dari suatu himpunan tanpa memperhatikan urutannya. Jika kita memilih r objek dari nnn objek yang tersedia, hasilnya disebut sebagai kombinasi dari nnn objek yang diambil r sekaligus.

Definisi

Untuk bilangan bulat r dan n dengan syarat $n > 0$ dan $0 < r < n$, koefisien binomial didefinisikan oleh

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Dengan kata lain, ketika n adalah bilangan bulat positif dan r merupakan bilangan bulat yang lebih besar dari 0 namun lebih kecil dari n, maka kita mendefinisikan koefisien binomial yang menyatakan banyaknya cara memilih r elemen dari n elemen tanpa memperhatikan urutan sebagaimana akan dijelaskan selanjutnya.

Preposisi

Misalkan n dan r adalah bilangan bulat dengan $n \geq 0$ dan $0 \leq r \leq n$. Banyaknya cara untuk memilih r objek dari n objek adalah $\binom{n}{r}$

Pembuktian

Jika $r = 0$, pernyataan tersebut benar karena hanya ada satu cara untuk memilih 0 objek (yaitu, tidak memilih apa pun), sedangkan $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$ karena $0! = 1$. Oleh karena itu, kita dapat mengasumsikan bahwa $r \geq 1$ dan karenanya $n \geq 1$.

Misalkan N adalah jumlah yang kita cari dengan kata lain, terdapat N cara untuk memilih r objek dari nnn objek yang diberikan. Perhatikan bahwa untuk setiap cara memilih rrr objek, terdapat $r!$ cara untuk mengurutkannya. Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya r -permutasi dari nnn objek (yang kita ketahui sebagai $P(n,r)$) adalah hasil perkalian antara jumlah cara memilih r objek dan $r!$, yaitu :

$$P(n,r) = N\ x\ r!$$

Maka,

$$N = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r},$$

Sehingga telah dibuktikan.

Contoh

1. Berapa banyak cara untuk memilih lima pemain dari tim tenis yang beranggotakan 10 orang untuk melakukan perjalanan ke pertandingan di sekolah lain ?

   Solusi : Jawabannya diberikan oleh jumlah kombinasi 5 dari 10 elemen. Jumlah kombinasi tersebut dihitung dengan rumus :

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!\,5!}$$

$$= \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 252$$

Jadi, terdapat 252 cara untuk memilih lima pemain dari 10 anggota tim tenis.

2. Sebuah tim beranggotakan 30 ilmuwan telah dipilih untuk melakukan penelitian di Antartika selama satu tahun. Berapa banyak cara untuk memilih enam ilmuwan dari tim tersebut untuk mengikuti ekspedisi pertama, dengan asumsi semua anggota tim memiliki peran yang sama ?

   Solusi : Jumlah cara untuk memilih enam ilmuwan dari 30 orang adalah jumlah kombinasi 6 dari 30 elemen, karena urutan pemilihan tidak berpengaruh. Jumlah kombinasi tersebut dihitung dengan rumus :

$$C(30,6) = \frac{30!}{6!\,24!}$$

$$= \frac{30\,.29\,.28\,.27\,.\,26\,.\,25}{6\,.5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 593{,}775$$

3. Berapa banyak string biner dengan panjang n yang mengandung tepat r angka 1?

   Solusi: Posisi dari rrr angka 1 dalam string biner dengan panjang nnn membentuk **kombinasi *r*-elemen** dari himpunan posisi $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Karena urutan pemilihan posisi angka 1 tidak berpengaruh, jumlah string biner yang mengandung tepat r angka 1 diberikan oleh:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Jadi, terdapat $C(n,r)$ string biner dengan panjang n yang memiliki tepat r angka 1.

4. Misalkan terdapat 9 anggota fakultas di departemen matematika dan 11 anggota di departemen ilmu komputer. Berapa banyak cara untuk memilih sebuah komite yang bertugas mengembangkan mata kuliah matematika diskrit di sebuah sekolah, jika komite tersebut terdiri dari tiga anggota dari departemen matematika dan empat anggota dari departemen ilmu komputer?

Solusi: Berdasarkan **aturan perkalian**, jumlah cara untuk memilih komite adalah hasil kali dari jumlah cara memilih 3 anggota dari 9 anggota fakultas matematika dan jumlah cara memilih 4 anggota dari 11 anggota fakultas ilmu komputer.
Jumlah cara memilih anggota dari masing-masing departemen adalah:

$$C(9,3) = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9\,.\,8\,.7}{3\,.\,2\,.1} = 84$$

$$C(11,4) = \frac{11!}{4!\,(11-4)!} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11\,.\,10\,.9\,.8}{4\,.3\,.\,2\,.1} = 330$$

Dengan menerapkan aturan perkalian, jumlah cara memilih komite adalah:

$C(9,3)\ x\ C(11,4) = 84\ x\ 330 = 27.720$

Jadi, terdapat **27.720 cara** untuk membentuk komite tersebut

Prinsip Dasar Perhitungan

Jika suatu tugas dapat dilakukan dalam m cara dan tugas lain dalam n cara (tanpa tumpang tindih), maka jumlah cara memilih salah satu tugas adalah $m+n$.

Jika suatu tugas terdiri dari dua tahap, dengan m cara memilih tahap pertama dan n cara memilih tahap kedua, maka total cara melakukan tugas adalah $m \times n$.

4.2.3 Koefisien dan Identitas Binomial

Banyaknya kombinasi rrr dari suatu himpunan yang terdiri atas nnn elemen sering dilambangkan dengan $C\ (n, r)$ atau $\binom{n}{r}$. Bilangan ini disebut **koefisien binomial**, karena muncul sebagai koefisien dalam ekspansi pangkat suatu ekspresi binomial, seperti $(a + b)^n$. Dalam bab ini, kita akan membahas **Teorema Binomial**, yang menyatakan bahwa pangkat suatu ekspresi binomial dapat dinyatakan sebagai penjumlahan sejumlah suku yang melibatkan koefisien binomial. Teorema ini akan dibuktikan menggunakan pendekatan **pembuktian kombinatorial**.

Selain itu, kita juga akan menunjukkan bagaimana pembuktian kombinatorial dapat digunakan untuk menetapkan berbagai identitas penting yang menggambarkan hubungan antara koefisien binomial.

Teorema binomial

Teorema binomial memberikan koefisien perluasan pangkat ekspresi binomial. Ekspresi binomial hanyalah penjumlahan dua suku, misalnya x + y.

Misalkan x dan y adalah variabel, dan n adalah bilangan bulat non-negatif. Kemudian

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Pembuktian

Untuk memahami pembuktian kombinatorial dari teorema ini, kita akan fokus pada proses bagaimana setiap suku dalam ekspansi terbentuk. Misalkan kita ingin mengalikan ekspresi $(x+y)^n$, yang berarti kita mengalikan nnn faktor dari bentuk $(x+y)$. Ekspansi ini akan menghasilkan suku-suku yang berbeda berdasarkan berapa banyak x dan y yang muncul dalam hasil perkalian.

1. **Mengembangkan Ekspresi $(x+y)^n$**
   Ekspansi perkalian $(x+y)^n$ menghasilkan semua kemungkinan cara memilih elemen x dan y dari masing-masing faktor. Setiap faktor $(x+y)$ memiliki dua pilihan: memilih x atau memilih y.
2. **Mendapatkan Bentuk $x^{n-j}y^j$**
   Suku-suku yang muncul dalam ekspansi ini memiliki bentuk $x^{n-j}y^j$untuk setiap $j = 0,1,2,\dots,n$. Dalam bentuk ini, j adalah jumlah faktor yang memilih y, dan $n-j$ adalah jumlah faktor yang memilih x.
3. **Menghitung Koefisien**
   Untuk memperoleh suku $x^{n-j}y^j$, kita perlu memilih $n-j$ faktor yang akan menjadi x dan sisanya (yaitu j) akan menjadi y. Karena ada n faktor yang bisa dipilih, kita harus memilih $n-j$ faktor untuk x (atau, setara,

memilih j faktor untuk y) dari n faktor. Jumlah cara untuk melakukannya adalah jumlah **kombinasi** yang dapat dipilih, yaitu $\binom{n}{j}$.

Sebagai contoh, jika kita ingin memilih 2 elemen x dan 3 elemen y dari 5 faktor, maka jumlah cara untuk memilih 2 elemen x (dan otomatis yang tersisa adalah y) adalah $\binom{5}{2}$

4. **Koefisien Binomial**

   Dalam ekspansi $(x+y)^n$, koefisien binomial $\binom{n}{j}$ mengungkapkan jumlah cara untuk memilih j faktor y dari n faktor total. Sehingga, koefisien di depan suku $x^{n-j}y^j$ adalah $\binom{n}{j}$ yang menggambarkan kombinasi pemilihan elemen-elemen tersebut.

5. **Bukti Kombinatorial**

   Pembuktian kombinatorial yang diberikan mengonfirmasi bahwa untuk setiap suku $x^{n-j}y^j$ dalam ekspansi, koefisien binomial yang terlibat adalah $\binom{n}{j}$. Hal ini membuktikan bahwa ekspansi $(x+y)^n$ dapat ditulis sebagai penjumlahan dari suku-suku $\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$ untuk $j = 0,1,2,\dots,n$.

Contoh Ekspansi

Untuk lebih memperjelas, mari kita lihat contoh dengan $n = 3$

$$(x+y)^3 = (\mathrm{x}+\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y})(\mathrm{x}+\mathrm{y})$$

Mengalikan secara langsung, kita memperoleh:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Jika kita menggunakan Teorema Binomial, kita dapat menulis ekspansi ini sebagai:

$$(x+y)^3 = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} x^{3-j} y^j$$

Dengan menghitung setiap suku:

- Untuk $j = 0$, $\binom{3}{0} x^3 y^0 = x^3$
- Untuk $j = 1$, $\binom{3}{1} x^3 y^1 = 3x^2 y$
- $j = 2$, $\binom{3}{2} x^3 y^0 = 3xy^2$
- $j = 3$, $\binom{3}{3} x^3 y^0 = y^3$

Sehingga ekspansinya adalah:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Teorema Binomial memberikan cara yang efisien untuk memperluas bentuk pangkat dari ekspresi binomial $(x+y)^n$. Pembuktian kombinatorial dari teorema ini menunjukkan bagaimana koefisien binomial $\binom{n}{j}$ mengatur banyaknya cara untuk memilih elemen-elemen x dan y dalam ekspansi tersebut, yang dihasilkan dari kombinasi pemilihan j faktor y dari n faktor total.

Contoh

1. Bagaimana ekspansi (perluasan) dari $(x+y)^4$?

Solusi :

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j}y^j$$

$$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

2. Berapakah koefisien $x^{12}y^{13}$ pada pemuaian $(2x-3y)^{25}$?

Solusi: Pertama, perhatikan bahwa persamaan ini sama dengan $(2x+(-3y))^{25}$. Dengan teorema binomial, kita memiliki

$$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j}(-3y)^j.$$

Akibatnya, koefesien dari $x^{12}y^{13}$ diperoleh jika $j = 13$, maka

$$\binom{\mathbf{25}}{\mathbf{13}} \mathbf{2^{12}(-3)^{13}} = \frac{\mathbf{25!}}{\mathbf{13!\,12!}} \mathbf{2^{12}3^{13}}$$

4.2.4 Identitas dan Segitiga Pascal

Koefisien binomial memiliki beragam identitas yang berbeda. Dalam bagian ini, akan diperkenalkan salah satu identitas yang paling fundamental.

Teorema Identitas Pascal

Jika n dan k adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq k$, maka **Identitas Pascal** dinyatakan sebagai berikut:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Pembuktian

Kita akan membuktikan **Identitas Pascal** berikut menggunakan pendekatan kombinatorial:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Langkah 1: Definisi dan Pemodelan

Misalkan kita memiliki himpunan T yang terdiri dari $n+1$ elemen. Kita ingin menghitung jumlah cara memilih k elemen dari himpunan T.

Pilih salah satu elemen dari T, misalkan elemen tersebut adalah a. Selanjutnya, kita buat himpunan S yang berisi semua elemen di T kecuali a, dan $S = T - \{a\}$, sehingga S memiliki n elemen.

Langkah 2: Pembagian Kasus

Sebuah himpunan bagian berukuran k dari T bisa memiliki dua kemungkinan:

1. **Kasus 1: Himpunan bagian mengandung** a
   - Jika a dipilih, maka kita harus memilih $k-1$ elemen dari S yang tersisa.

- Banyaknya cara memilih $k-1$ elemen dari S adalah $\binom{n}{k-1}$.

2. **Kasus 2: Himpunan bagian tidak mengandung a**
   - Jika a tidak dipilih, maka kita harus memilih semua k elemen dari S.
   - Banyaknya cara memilih k elemen dari S adalah $\binom{n}{k}$.

Langkah 3: Menyusun Kesimpulan

Karena setiap himpunan bagian dari T yang memiliki k elemen harus termasuk dalam salah satu dari dua kasus di atas, maka jumlah totalnya adalah:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Ini membuktikan **Identitas Pascal** secara kombinatorial.

Identitas ini juga dapat dibuktikan dengan manipulasi aljabar dari rumus untuk $\binom{n}{r}$. Berikut Segitiga Pascal yang disajikan pada Gambar 4.1

Gambar 4. 1. Segitiga Pascal

(Sumber :Rosen, 2012)

4.3 Prinsip *Pigeonhole* (Sarang Burung Merpati)

Prinsip Pigeonhole, atau yang dikenal sebagai prinsip sarang merpati juga disebut sebagai **Dirichlet drawer principle** (prinsip laci Dirichlet), dinamai oleh matematikawan Jerman abad ke-19, G. Lejeune Dirichlet, yang sering menggunakan prinsip ini dalam karyanya (Dirichlet bukanlah orang pertama yang menggunakan prinsip ini; sebuah demonstrasi bahwa setidaknya ada dua warga Paris dengan jumlah rambut di kepala yang sama sudah ada sejak abad ke-17.)

Dirichlet drawer principle adalah konsep dasar dalam kombinatorika yang menyatakan bahwa jika terdapat lebih banyak objek dibandingkan tempat atau kategori yang

tersedia, maka setidaknya satu tempat harus menampung lebih dari satu objek. Dirichlet drawer principle

Sebagai ilustrasi, misalkan terdapat **20 ekor merpati** yang hendak bertengger di **19 kotak sarang**. Karena jumlah merpati lebih banyak dibandingkan jumlah kotak sarang, maka **pasti ada setidaknya satu kotak sarang yang berisi lebih dari satu merpati**. Hal ini dapat dibuktikan dengan berpikir secara kontradiktif: jika setiap kotak hanya diisi oleh satu merpati, maka maksimal hanya ada 19 merpati yang dapat bertengger, padahal terdapat 20 merpati. Dengan demikian, kesimpulan yang tak terelakkan adalah adanya setidaknya satu kotak sarang yang berisi lebih dari satu merpati.

Prinsip ini berlaku tidak hanya pada kasus burung merpati dan kotak sarang, tetapi juga dalam berbagai situasi lainnya, seperti pembagian sumber daya, distribusi data, dan pengelompokan objek. Secara umum, **jika n objek dimasukkan ke dalam m tempat dengan $n > m$ maka setidaknya satu tempat akan menampung lebih dari satu objek.**

Prinsip Pigeonhole sering digunakan dalam berbagai cabang matematika, termasuk teori bilangan, teori graf, dan analisis kombinatorial, untuk membuktikan adanya pola atau struktur tertentu dalam suatu himpunan data.

Teorema Prinsip Pigeonhole

Jika k adalah bilangan bulat positif, dan terdapat $k + 1$ **atau lebih objek** yang ditempatkan ke dalam k **kotak,** maka **setidaknya satu kotak** harus berisi **dua atau lebih objek.**

Pembuktian

Berikut adalah pembuktian **Prinsip Sarang Merpati (Pigeonhole Principle)** menggunakan metode **kontraposisi**:

Kita akan membuktikan pernyataan ini dengan menggunakan **kontraposisi**, yaitu dengan membuktikan bahwa jika **tidak ada kotak yang berisi lebih dari satu objek,** maka jumlah objek tidak bisa lebih dari k.

Langkah 1: Asumsi Negasi dari Kesimpulan

Misalkan **tidak ada** kotak yang berisi lebih dari **satu objek.** Ini berarti bahwa setiap kotak berisi paling banyak **satu objek** atau kosong.

Langkah 2: Perhitungan Maksimum Objek

Karena hanya ada k **kotak**, dan masing-masing kotak bisa berisi paling banyak **satu objek**, maka jumlah maksimum objek yang dapat ditempatkan adalah k.

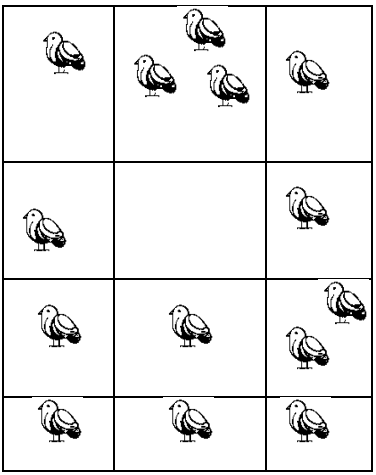
Langkah 3: Kontradiksi

Namun, berdasarkan hipotesis teorema, kita memiliki $k + 1$ **atau lebih objek.** Ini bertentangan dengan hasil perhitungan kita bahwa jumlah maksimum objek hanya k.

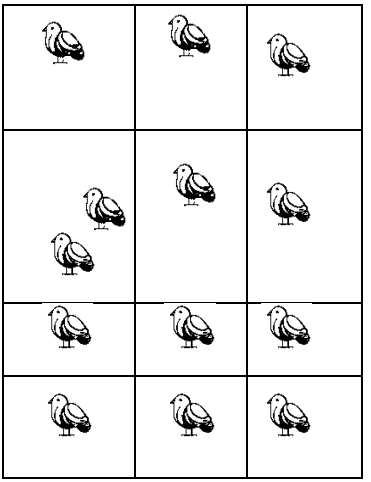
Kesimpulan

Karena asumsi awal kita mengarah pada kontradiksi, maka asumsi tersebut salah. Artinya, **setidaknya ada satu kotak yang berisi dua atau lebih objek,** sehingga prinsip sarang merpati terbukti benar.

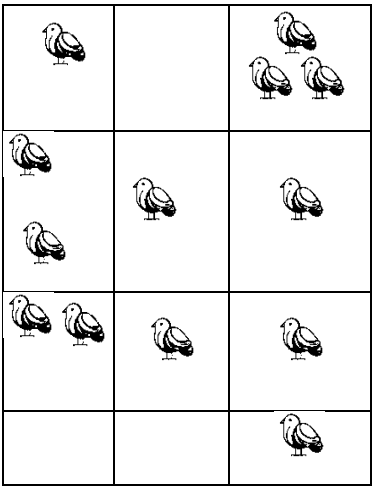
Jika kita memiliki lebih banyak objek daripada tempat untuk menampungnya, maka setidaknya satu tempat harus memiliki lebih dari satu objek. Berikut ilustrasi yang disajikan pada Gambar 4.2 berikut.



(a)



(b)



(c)

Gambar 4. 2. Jumlah Merpati Lebih Banyak Daripada Lubang Merpati.

Contoh

1. Dalam suatu ruangan terdapat 367 orang. Buktikan bahwa ada setidaknya dua orang yang memiliki tanggal ulang tahun yang sama.

Solusi: Dalam satu tahun kalender, terdapat maksimal 366 kemungkinan hari ulang tahun (termasuk tahun kabisat). Jika terdapat 367 orang, maka jumlah orang lebih banyak daripada jumlah kemungkinan hari ulang tahun. Dengan menerapkan **Prinsip Pigeonhole**, di mana jumlah objek (orang) lebih banyak daripada jumlah tempat (hari ulang tahun), setidaknya ada dua orang yang memiliki ulang tahun yang sama.

2. Diketahui ada 27 kata dalam bahasa Inggris. Tunjukkan bahwa ada setidaknya dua kata yang diawali dengan huruf yang sama.

Solusi: Terdapat 26 huruf dalam alfabet bahasa Inggris. Jika ada 27 kata, maka jumlah kata lebih banyak daripada jumlah huruf alfabet. Dengan menerapkan **Prinsip Pigeonhole**, setidaknya ada dua kata yang diawali dengan huruf yang sama.

3. Berapa jumlah minimum siswa dalam suatu kelas agar dijamin ada setidaknya dua siswa yang mendapatkan nilai yang sama dalam ujian akhir, jika nilai berkisar antara 0 hingga 100?

Solusi: Rentang nilai ujian adalah dari 0 hingga 100, sehingga terdapat **101 kemungkinan nilai**. Jika terdapat **102 siswa**,

maka dengan **Prinsip Pigeonhole**, setidaknya ada dua siswa yang memperoleh nilai yang sama.

4. Sebuah perusahaan memiliki 50 karyawan yang masing-masing memilih satu dari tujuh hari dalam seminggu sebagai hari favorit mereka. Tunjukkan bahwa setidaknya ada satu hari yang dipilih oleh minimal 8 karyawan.

Solusi: Terdapat 7 hari dalam seminggu dan 50 karyawan yang memilih hari favorit mereka. Jika setiap hari hanya dipilih oleh maksimal 7 orang, maka total jumlah maksimum orang yang dapat memiliki hari unik adalah 7 × 7 = 49. Namun, karena ada 50 karyawan, maka setidaknya ada satu hari yang dipilih oleh minimal 8 orang, sesuai dengan **Prinsip Pigeonhole**.

Rangkuman

1. Permutasi merupakan susunan objek dengan urutan diperhatikan.

Rumus:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2. Kombinasi merupakan pemilihan objek tanpa memperhatikan urutan.

Rumus:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

3. Prinsip Pigeonhole yaitu Jika n objek dimasukkan ke dalam m tempat dan $n > m$, maka setidaknya satu tempat

berisi lebih dari satu objek. Konsep ini berguna dalam analisis kombinatorial dan probabilitas.

Latihan

1. Buktikan bahwa jika ada 30 siswa dalam suatu kelas, maka setidaknya ada dua siswa yang memiliki nama belakang yang diawali dengan huruf yang sama.
2. Sebuah mangkuk berisi **10 bola merah** dan **10 bola biru**. Seorang wanita memilih bola secara acak tanpa melihatnya.
   (a) Berapa banyak bola yang harus dia pilih agar **pasti** memiliki **setidaknya tiga bola dengan warna yang sama**?
   (b) Berapa banyak bola yang harus dia pilih agar **pasti** memiliki **setidaknya tiga bola biru**?
3. Delapan kuda ikut serta dalam sebuah perlombaan, di mana akan diberikan hadiah untuk **juara pertama, kedua, dan ketiga.** Dengan asumsi tidak ada hasil seri (setiap peringkat hanya diisi oleh satu kuda), berapa banyak kemungkinan hasil yang berbeda?
4. Di dalam kelas terdapat **30 orang** yang sedang belajar tentang permutasi. Secara bertahap, **delapan orang** keluar satu per satu melalui pintu belakang. Berapa banyak cara yang mungkin terjadi untuk keluarnya delapan orang tersebut?
5. Berapa banyak **permusian (susunan urutan)** dari huruf-huruf **a, b, c, d, e, f, g** yang memiliki **tepat dua atau tiga huruf di antara huruf "a" dan "b"?**
6. Berapa banyak sinyal berbeda yang dapat dibentuk menggunakan **tujuh bendera** yang disusun secara vertikal, jika terdiri dari **tiga bendera merah yang identik** dan **empat bendera biru yang identik?**

7. Sebuah kelompok yang terdiri dari **delapan ilmuwan** terdiri atas **lima matematikawan** dan **tiga geolog**.
   (a) Ada berapa cara untuk memilih **lima orang** yang akan mengunjungi **pengeboran minyak**?
   (b) Jika kelompok lima orang tersebut harus terdiri dari **tiga matematikawan** dan **dua geolog**, ada berapa cara untuk memilih kelompok tersebut?
8. Dalam sebuah tim softball, **13 orang** hadir untuk pertandingan.
   (a) Ada berapa cara untuk memilih **10 pemain** yang akan bermain di lapangan?
   (b) Ada berapa cara untuk **menetapkan posisi** bagi **10 pemain** yang dipilih dari 13 orang?
   (c) Dari 13 orang tersebut, **3 adalah wanita**. Ada berapa cara untuk memilih **10 pemain** jika **setidaknya satu pemain harus wanita**?
9. Cari hasil pengembangan dari $(x + y)^6$.
10. Cari koefisien dari x^5y^8 dalam pengembangan $(x + y)^{13}$.

DAFTAR PUSTAKA

Munir, R. 2003. Materi Kuliah Matematika Diskrit. *Informatika-ITB, Bandung*.

Aleja, D. and Criado, R. 2022. 'La recta real y el conjunto de los números reales R', *Forum Docentis*, 1(1), pp. 3–13. Available at: https://doi.org/10.33732/fd.v2022.n1.2.

Keevash, P., Samotij, W., & Sudakov, B. 2023 'Combinatorics', *Oberwolfach Reports*, 20(1), pp. 5–89. Available at: https://doi.org/https://doi.org/10.4171/owr/2023/1.

Rosen, K.H. and Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Discrete and Its Seventh Edition*.

Thoery, G., Goodoire, E.G. and Pormenlte, M.M. 2002. *Discrete Mathematices*.

BAB 5
MATEMATIKA DISKRIT II KONSEP LANJUT UNTUK PEMODELAN DAN ANALISIS TEORI BILANGAN DAN KRIPTOGRAFI

Oleh Rektor Sianturi

5.1 Pendahuluan

Bayangkan sebuah dunia tanpa kunci. Dunia di mana surat-surat rahasia bisa dibaca oleh siapa saja, transaksi online kita bisa dengan mudah disadap, dan data pribadi kita tersebar bebas. Dunia yang seperti itu tentu akan sangat kacau, bukan? Di sinilah keajaiban kriptografi hadir sebagai benteng pertahanan terakhir untuk menjaga keamanan informasi kita. Tapi, apa hubungannya dengan bilangan-bilangan? Kriptografi, ilmu tentang mengamankan informasi, Konsep ini ternyata memiliki sejarah panjang dan signifikan dalam perkembangan matematika, khususnya dalam teori bilangan yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat. Teori bilangan merupakan cabang matematika yang mendalami karakteristik mendasar dari bilangan bulat, mulai dari sifat-sifat dasar hingga masalah yang sangat kompleks. Mungkin terdengar membosankan, tapi di balik kesederhanaannya, teori bilangan menyimpan rahasia yang sangat kuat. Konsep-konsep seperti bilangan prima, faktorisasi, dan kongruensi modular menjadi kunci utama dalam membangun sistem kriptografi yang sangat sulit dipecahkan.

Mari kita ambil contoh sederhana. Bayangkan Anda memiliki sebuah kotak yang sangat kuat dan Anda ingin menguncinya. Anda membutuhkan dua kunci yang sangat khusus untuk membuka kotak itu. Kunci-kunci ini saling melengkapi, dan sangat sulit bagi orang lain untuk membuat duplikat kunci tersebut. Dalam kriptografi, kunci-kunci ini disebut sebagai kunci publik dan kunci privat.

Dalam kriptografi, bilangan prima digunakan untuk menciptakan kunci-kunci yang sangat sulit dipecahkan. Prosesnya mirip seperti membuat sebuah puzzle yang sangat rumit. Untuk memecahkan puzzle ini, seseorang harus menemukan dua bagian puzzle yang sangat kecil dan spesifik. Semakin besar puzzle tersebut, semakin sulit untuk menemukan bagian-bagiannya. Begitu pula dengan bilangan prima dalam kriptografi. Semakin besar bilangan prima yang digunakan, semakin sulit bagi penyerang untuk memecahkan kode enkripsi.

Salah satu contoh penerapan teori bilangan dalam kriptografi adalah algoritma RSA. Algoritma ini bekerja dengan memanfaatkan kesulitan dalam memfaktorkan bilangan bulat besar menjadi bilangan prima. Bayangkan Anda memiliki sebuah bilangan yang sangat besar, dan Anda ingin mengetahui faktor prima dari bilangan tersebut. Meskipun terdengar sederhana, tugas ini bisa sangat sulit, terutama jika bilangannya sangat besar.(Akbar, 2021)

Mengapa sulit? Karena tidak ada metode cepat dan efisien untuk memfaktorkan bilangan bulat besar. Semakin besar bilangannya, semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk menemukan faktor prima-nya. Inilah yang membuat

algoritma RSA menjadi sangat aman. Manfaat dari teori bilangan dalam kriptografi adalah:

1. Keamanan. Teori bilangan memungkinkan kita untuk membangun sistem kriptografi yang sangat sulit dipecahkan, sehingga melindungi informasi kita dari ancaman siber.
2. Privasi. Kriptografi memungkinkan kita untuk berkomunikasi secara aman tanpa khawatir informasi kita disadap oleh pihak yang tidak berwenang.
3. Integritas. Kriptografi dapat memastikan bahwa informasi yang kita terima tidak telah diubah atau rusak selama proses transmisi.

5.2 Teori Bilangan dan Kriptografi

5.2.1 Bilangan Prima

1. Definisi
   Bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua faktor, yaitu 1 dan dirinya sendiri, disebut bilangan prima. Bilangan bulat positif yang memiliki lebih dari dua faktor disebut bilangan komposit, berbeda dengan bilangan prima yang hanya mempunyai dua faktor. (Waluyo & Supiyati, n.d.)
   Contoh:
   Barisan bilangan prima: 2,3,5,7,11,13,17, …
   Barisan bilangan komposit: 4,6,8,9,10,12,14,15,…
2. Sifat Bilangan Prima
   a. Bilangan prima minimal adalah 2.
   b. Semua bilangan prima selain 2 adalah bilangan ganjil.

c. Jumlah dua bilangan prima selalu merupakan bilangan genap.
d. Setiap bilangan asli positif dapat diuraikan menjadi hasil kali bilangan prima (teori fundamental aritmatika).

3. Jenis-jenis bilangan prima
   a. Bilangan prima sederhana (misalnya: 2, 3, 5).
   b. Bilangan prima komposit (hasil kali dua bilangan prima, misalnya: $6 = 2 \times 3$).
   c. Bilangan prima relatif (bilangan prima yang relatif terhadap bilangan lain, misalnya: 2 dan 3 relatif prima).
4. Teorema dan konsep penting
   a. Teorema Euklides

      Himpunan bilangan prima adalah tak hingga.

      Bukti.

      Cara membuktikan Teorema Euklides itu unik. Kita buat bilangan baru dengan cara mengalikan semua bilangan prima yang sudah kita tahu, lalu ditambah 1. Bilangan baru inilah yang akan kita teliti. Misalnya, kalau kita mulai dari bilangan prima 2, maka kita akan dapat:

      $P_1 = 2 + 1 = 3$

      $P_2 = 2.3 + 1 = 7$

      $P_3 = 2.3.5 + 1 = 31$

      $P_4 = 2.3.5.7 + 1 = 211$

      $P_5 = 2.3.5.7.11 + 1 = 2311$

      Buktikan bahwa bilangan-bilangan P_1, P_2, P_3, P_4, dan P_5 adalah bilangan prima. Kemudian, hitunglah nilai P_6, P_7, dan P_8. Terakhir, tunjukkan bahwa ketiga bilangan terakhir tersebut merupakan bilangan komposit.

$P_6 = 59.50$

$P_7 = 19.97.277$

$P_8 = 347.27953$

Kita belum tahu pasti apakah ada banyak sekali nilai k yang membuat P_k menjadi bilangan prima. Pertanyaan yang sama juga bisa kita tanyakan untuk bilangan yang bukan prima (bilangan komposit). Apakah ada banyak sekali bilangan komposit dalam deretan P_k?

Kita punya deretan bilangan prima: 2, 3, 5, 7, ..., sampai yang ke-n yaitu P_n. Sekarang, kita mau cari angka terbesar yang selalu lebih besar dari bilangan prima mana pun dalam deretan ini. Dari pembuktian Teorema Euklides tadi, kita bisa tahu kalau:

$P_{n+1} \leq p_1p_2p_3 \ldots p_n + 1 < P_n^n + 1.$

Contoh:

Kalau kita ganti n dengan 3, kita dapat $7 = P_4 < 8 + 1 = 9$. Ini artinya bilangan prima ke-4, yaitu 7, lebih kecil dari 9. Jadi, perkiraan kita benar.

b. Teorema Fundamental Aritmatika

Setiap bilangan bulat positif $n > 1$ dapat dituliskan sebagai produk dari bilangan-bilangan prima.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema diatas dapat menggunakan metode induksi matematika. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- Basis Induksi: Untuk n = 2, yang merupakan bilangan prima, pernyataan jelas benar.
- Langkah Induksi: Misalkan pernyataan benar untuk semua bilangan bulat positif hingga k. Untuk k + 1:

- Jika K + 1 adalah bilangan prima, maka tidak ada yang perlu dibuktikan.
- Jika k + 1 adalah komposit, maka ada pembagi terkecil p yang merupakan bilangan prima. Dengan demikian, kita dapat menulis k + 1= p×m, di mana m < k + 1. Karena kita telah mengasumsikan bahwa semua bilangan hingga mm memiliki faktorisasi unik, maka m juga memiliki faktorisasi prima yang unik.

❖ Dengan menggabungkan hasil ini, kita mendapatkan faktorisasi unik untuk k+1.

c. Konsep kembar prima.

Bilangan prima kembar adalah pasangan bilangan prima yang memiliki selisih tepat 2.

Misalnya, pasangan (3, 5) dan (11, 13) adalah contoh dari bilangan prima kembar. Konsep ini merupakan topik menarik dalam teori bilangan dan telah menjadi subjek penelitian selama bertahun-tahun.

Definisi Bilangan Prima Kembar

Dua bilangan prima p dan q disebut sebagai bilangan prima kembar jika q – p = 2.

Contoh Pasangan nya.

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) dan lain-lain.

d. Konsep bilangan prima palindrome.

Bilangan prima palindromik adalah bilangan prima yang tetap sama ketika dibaca dari depan maupun belakang.

Misalnya, bilangan 101 adalah contoh dari bilangan prima palindromik. Konsep ini menarik karena

menggabungkan dua sifat penting dalam teori bilangan: keprimaan dan palindromisitas.

Definisi Bilangan Prima Palindromik.

- ❖ Bilangan Prima: Bilangan bulat positif yang hanya memiliki dua faktor, yaitu 1 dan dirinya sendiri.
- ❖ Bilangan Palindromik: Bilangan yang tetap sama jika dibaca dari depan maupun belakang. Contoh: 121, 131, 141.

Dengan demikian, bilangan prima palindromik adalah bilangan yang memenuhi kedua kriteria tersebut. Contoh bilangan prima palindromik meliputi:

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191 dan lain-lain.

5.2.2 Kongruensi

1. Definisi

   Dalam teori bilangan, kongruensi didefinisikan sebagai hubungan antara dua bilangan yang memiliki sisa yang sama ketika dibagi oleh bilangan tertentu. Secara matematis, dapat ditulis sebagai:

   $a \equiv b \pmod{n}$ yang artinya a kongruen dengan b modulo n. (Nurhardiani et al., 2011)
2. Sifat-sifat kongruensi
   a. Refleksif: $a \equiv a \pmod{n}$
   b. Simetris: $a \equiv b \pmod{n}$ maka $b \equiv a \pmod{n}$
   c. Transitif: $a \equiv b \pmod{n}$ dan $b \equiv c \pmod{n}$ maka $a \equiv c \pmod{n}$
   d. Penjumlahan: $a \equiv b \pmod{n}$ dan $c \equiv d \pmod{n}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{n}$

e. Perkalian: a ≡ b (mod n) dan c ≡ d (mod n) maka ac ≡ bd (mod n)

3. Teorema dan konsep penting
   a. Teorema Euclid: a ≡ b (mod n) jika dan hanya jika $n|(a-b)$.
   b. Teorema Fermat: a^(p-1) ≡ 1 (mod p) untuk p prima
   c. Teorema Euler: a^(φ(n)) ≡ 1 (mod n) untuk (a,n) = 1
   d. Konsep kunci publik dan kunci privat dalam kriptografi

Contoh:

1. Tentukan apakah bilangan 17 dan 21 adalah bilangan prima atau bukan dengan menggunakan metode pembagian.

   Penyelesaian:

   Untuk 17:

   ❖ Bilangan prima adalah bilangan yang hanya memiliki dua pembagi, yaitu 1 dan dirinya sendiri.
   ❖ Pembagi yang perlu diperiksa adalah bilangan prima kurang dari atau sama dengan $\sqrt{17}$ (yaitu 2,3,5).
   ❖ 17 tidak habis dibagi oleh 2,3, atau 5.
   ❖ Maka, 17 adalah bilangan prima.

   Untuk 21:

   ❖ Pembagi yang perlu diperiksa adalah bilangan prima kurang dari atau sama dengan $\sqrt{21}$ (yaitu 2,3,5).
   ❖ 21 habis dibagi oleh 3 (karena 21 = 3 × 7).
   ❖ Maka, 21 adalah bilangan komposit.

2. Diberikan dua bilangan bulat positif a = 15 dan b = 10. Tentukan apakah mereka kongruen modulo p = 5.

   Penyelesaian:

- ❖ Hitung selisih: a – b = 15 – 10 = 5.
- ❖ Periksa apakah p = 5 membagi selisih: Karena 5 ÷ 5 = 1, maka p | (a – b).
- ❖ Oleh karena itu, kita dapat menulis: a ≡ b (mod 5).

5.2.3 Teorema Euler

1. Definisi
   Teorema Euler menyatakan bahwa jika a dan n adalah bilangan positif yang koprima (tidak memiliki faktor persekutuan selain 1), maka:
   a^(φ(n)) ≡ 1 (mod n),
   di mana φ(n) adalah fungsi Euler, yaitu jumlah bilangan positif yang kurang dari atau sama dengan n dan koprima dengan n. (Kromodimoeljo, 2009)
2. Fungsi Euler
   Fungsi Euler φ(n) didefinisikan sebagai:
   φ(n) = jumlah {1 ≤ k ≤ n | gcd(k,n) = 1}
   Contoh:
   1. φ(10) = 4 karena bilangan 1, 3, 7, 9 koprima dengan 10.
   2. φ(17) = 16 karena semua bilangan 1-16 koprima dengan 17.
3. Teorema euler:
   a^(φ(n)) ≡ 1 (mod n)
   Bukti:
   Untuk membuktikan Teorema Euler maka menggunakan konsep kongruensi dan fungsi Euler:
   a. Misalkan a dan n koprima.
   b. Tentukan himpunan A = {a, 2a, 3a, ..., φ(n)a} mod n.
   c. Himpunan A memiliki φ(n) elemen yang berbeda.

d. Karena a dan n koprima, maka setiap elemen A juga koprima dengan n.
e. Dengan demikian, A = {1, 2, ..., φ(n)} mod n.
f. Hasil kali semua elemen A adalah a^φ(n) ≡ 1 (mod n).

Contoh:

1. Tunjukkan bahwa 2^6 ≡ 1 (mod 9).
   Penyelesaian:
   - ❖ Hitung 2^6 : 2^6 = 64
   - ❖ Bagi 64 dengan 9: 64 ÷ 9 = 7 dengan sisa 1
   - ❖ Tuliskan hasilnya dalam bentuk kongruensi: 64 ≡ 1 (mod 9)
2. Hitung φ(24) dan tunjukkan bahwa 5^φ(24) ≡ 1 (mod 24).
   Penyelesaian:
   Untuk φ(24), kita cari bilangan yang koprima dengan 24:
   1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
   Jadi, φ(24) = 8.
   Tunjukkan bahwa 5^φ(24) ≡ 1 (mod 24)
   Dengan φ(24) = 8, kita hitung:
   5^8 = 390,625
   Sekarang, kita bagi 390,625 dengan 24:
   390,625 ÷ 24 = 16,276 dengan sisa 1
   Jadi, 5^8 ≡ 1 (mod 24).
   Maka diperoleh:
   - ❖ φ(24) = 8
   - ❖ 5^φ(24) ≡ 5^8 ≡ 1 (mod 24)

5.2.4 Algoritma Euclid

1. Definisi
   Algoritma Euclid adalah metode untuk mencari Greatest Common Divisor (GCD) atau faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan. Algoritma ini dikembangkan oleh matematikawan Yunani, Euclid. (Kromodimoeljo, 2009)
2. Langkah-langkah
   a. Tentukan dua bilangan a dan b.
   b. Jika b = 0, maka GCD(a, b) = a.
   c. Jika b ≠ 0, maka:
      - ❖ Bagi a dengan b dan dapatkan sisa r.
      - ❖ Ganti a dengan b dan b dengan r.
      - ❖ Ulangi langkah 3 sampai b = 0.
   d. GCD(a, b) adalah nilai b terakhir.

Contoh:

1. Cari GCD(24, 30).
   Penyelesaian:
   $24 = 30 \times 0 + 24$
   $30 = 24 \times 1 + 6$
   $24 = 6 \times 4 + 0$
   GCD(24, 30) = 6
2. Cari GCD(17, 23).
   Penyelesaian:
   $23 = 17 \times 1 + 6$
   $17 = 6 \times 2 + 5$
   $6 = 5 \times 1 + 1$
   $5 = 1 \times 5 + 0$
   GCD(17, 23) = 1

5.3 Penerapan dalam Kriptografi

5.3.1 Algoritma RSA

Algoritma RSA adalah salah satu metode kriptografi kunci publik yang paling terkenal dan banyak digunakan saat ini. Dikenal karena keamanannya yang tinggi, RSA digunakan untuk mengamankan berbagai macam data sensitif, mulai dari komunikasi online hingga transaksi keuangan. (Parama, 2017)

Sebelum membahas lebih jauh tentang RSA, mari kita pahami dulu konsep kriptografi kunci publik. Berbeda dengan kriptografi simetris yang menggunakan kunci yang sama untuk enkripsi dan deskripsi, kriptografi kunci publik menggunakan sepasang kunci yang berbeda:

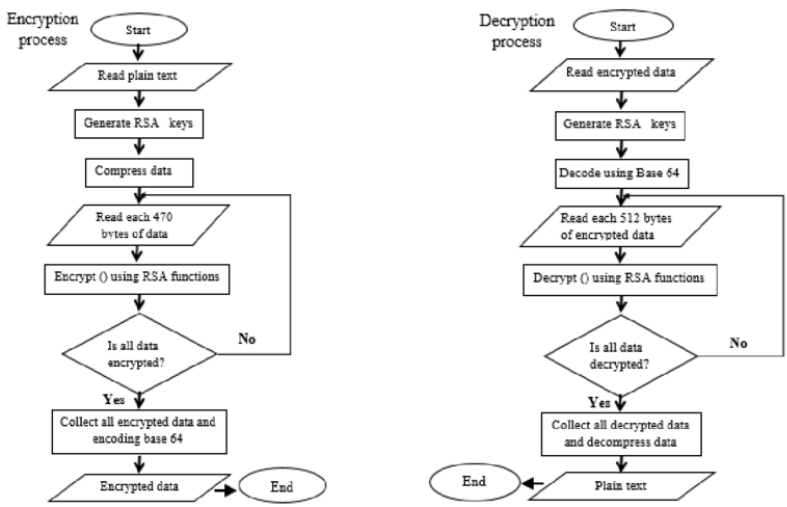
1. Kunci Publik: Disebarluaskan ke publik. Digunakan untuk mengenkripsi data.
2. Kunci Privat: Dirahasiakan oleh pemilik. Digunakan untuk mendeskripsi data yang dienkripsi dengan kunci publik.

Algoritma RSA bekerja berdasarkan prinsip matematika yang kompleks, khususnya teori bilangan prima. Berikut adalah Langkah-langkah dasar cara kerja RSA:

1. Pembangkitan Kunci:
    a. Pilih dua bilangan prima besar: p dan q.
    b. Hitung modulus: n = p * q.
    c. Hitung fungsi Euler: $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
    d. Pilih bilangan bulat e: $1 < e < \varphi(n)$ dan e harus relatif prima terhadap $\varphi(n)$. e ini akan menjadi kunci publik.

e. Hitung kunci privat d: d adalah invers multiplikatif dari e modulo φ(n). Artinya, e * d ≡ 1 (mod φ(n)).

2. Enkripsi:
   a. Pesan (plaintext) diubah menjadi bilangan bulat m.
   b. Pesan terenkripsi (ciphertext) c dihitung dengan rumus: c ≡ m^e (mod n).
3. Dekripsi:
   Pesan asli m dapat dipulihkan dari ciphertext c dengan rumus: m ≡ c^d (mod n).



Gambar 5. 1. Diagram alir operasi enkripsi dan dekripsi RSA

Keamanan RSA bergantung pada kesulitan memfaktorkan bilangan bulat besar menjadi faktor prima-nya. Semakin besar bilangan prima p dan q, semakin sulit bagi penyerang untuk memecahkan kunci privat.

Penggunaan RSA dalam Kehidupan Nyata adalah:

1. Keamanan Komunikasi: RSA digunakan untuk mengamankan koneksi HTTPS, memastikan data yang ditransmisikan antara browser dan server aman.
2. Digital Signature: RSA digunakan untuk membuat tanda tangan digital yang memastikan integritas dan autentikasi data.
3. Pertukaran Kunci Simetris: RSA sering digunakan untuk menukar kunci simetris yang lebih efisien untuk mengenkripsi data dalam jumlah besar.

Adapun Tantangan dan Perkembangan RSA adalah:

1. Ukuran Kunci: Untuk menjaga keamanan, ukuran kunci RSA terus bertambah, yang dapat memengaruhi kinerja sistem.
2. Serangan Kuantum: Algoritma Shor, sebuah algoritma kuantum, berpotensi memecahkan RSA dalam waktu yang relatif singkat.

5.3.2 Algoritma Diffie-Hellman

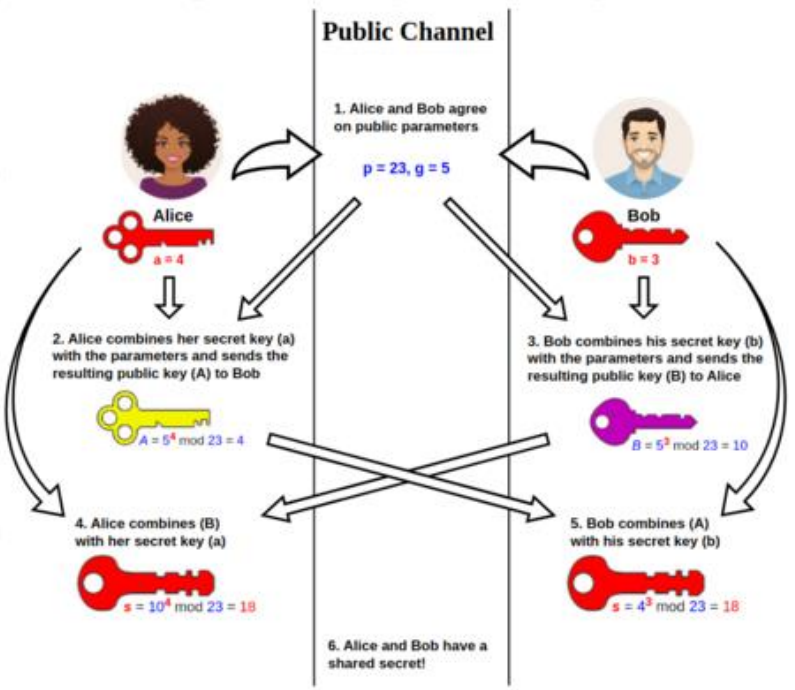
Algoritma Diffie-Hellman adalah salah satu metode pertukaran kunci publik yang paling awal dan paling terkenal dalam kriptografi. Algoritma ini memungkinkan dua pihak untuk menyepakati sebuah kunci rahasia yang sama secara aman, meskipun komunikasi mereka dilakukan melalui saluran yang tidak aman. Kunci rahasia ini kemudian dapat digunakan untuk mengenkripsi data menggunakan algoritma simetris seperti AES.(Juari, n.d.)

Langkah-langkah cara kerja nya sebagai berikut:

1. Pemilihan Parameter Publik:

a. Bilangan Prima Besar (p): Kedua pihak sepakat memilih bilangan prima besar (p) sebagai modulus untuk operasi matematika.
b. Akar Primitif (g): Mereka juga memilih sebuah bilangan bulat (g) yang merupakan akar primitif modulo p. Akar primitif adalah bilangan yang pangkatnya menghasilkan semua bilangan bulat dari 1 hingga p-1 modulo p.

2. Pembangkitan Kunci:
   a. Kunci Pribadi: Setiap pihak memilih secara acak sebuah bilangan bulat kecil (a atau b) sebagai kunci pribadi.
   b. Kunci Publik: Masing-masing pihak menghitung kunci publik mereka dengan menggunakan rumus:
      - ❖ Alice: A = g^a mod p
      - ❖ Bob: B = g^b mod p
   c. Kunci publik A dan B kemudian dipertukarkan melalui saluran yang tidak aman.
3. Perhitungan Kunci Rahasia:
   a. Alice: Setelah menerima B dari Bob, Alice menghitung kunci rahasia bersama: s = B^a mod p
   b. Bob: Setelah menerima A dari Alice, Bob menghitung kunci rahasia bersama: s = A^b mod p



Gambar 5. 2. Pertukaran Kunci Diffie-Hellman

Keamanan algoritma Diffie-Hellman bergantung pada kesulitan masalah logaritma diskrit. Artinya, sangat sulit bagi penyerang untuk menghitung nilai a atau b dari nilai A atau B yang sudah diketahui, meskipun mereka mengetahui nilai p dan g.

Adapun yang menjadi Keunggulan Algoritma Diffie-Hellman adalah:

1. Keamanan: Algoritma ini sangat aman karena kunci rahasia tidak pernah secara langsung ditransmisikan melalui saluran yang tidak aman.

2. Fleksibel: Dapat digunakan dalam berbagai protokol kriptografi.
3. Efisien: Perhitungan yang terlibat relatif sederhana.

Penggunaan dalam dunia nyata adalah:

Algoritma Diffie-Hellman digunakan secara luas dalam berbagai protokol keamanan, termasuk:

1. SSH (Secure Shell): Untuk mengamankan koneksi jarak jauh.
2. TLS/SSL: Untuk mengamankan komunikasi HTTPS.
3. IPsec: Untuk mengamankan komunikasi jaringan IP.

Adapun yang menjadi Keterbatasan nya adalah:

1. Kerentanan terhadap Serangan Man-in-the-Middle: Jika penyerang dapat memanipulasi pertukaran kunci publik, mereka dapat memperoleh kunci rahasia. Oleh karena itu, penting untuk memverifikasi identitas pihak yang berkomunikasi.
2. Kinerja: Untuk tingkat keamanan yang tinggi, diperlukan bilangan prima yang sangat besar, yang dapat memperlambat kinerja.

5.3.3 Kurva Eliptik dan Kriptografi Kurva Eliptik (ECC)

1. Kurva Eliptik

   Kurva eliptik adalah sebuah kurva matematika yang didefinisikan oleh persamaan tertentu. Meskipun namanya mengandung kata "eliptik", bentuk kurva ini tidak selalu berbentuk elips. Bentuk kurva eliptik dapat bervariasi tergantung pada nilai koefisien dalam persamaannya.(Kromodimoeljo, 2009)

Persamaan Umum Kurva Eliptik:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

di mana:
a dan b adalah konstanta
p adalah bilangan prima yang menentukan medan hingga di mana kurva didefinisikan.

Struktur matematika kurva eliptik memiliki sifat-sifat khusus yang sangat berguna dalam kriptografi. Operasi pada titik-titik pada kurva eliptik memiliki sifat satu arah yang sulit dibalik, membuatnya ideal untuk membangun sistem kriptografi yang aman.

2. Kriptografi Kurva Eliptik (ECC)

ECC adalah pendekatan terhadap kriptografi kunci publik yang memanfaatkan struktur aljabar dari kurva eliptik. Mirip dengan RSA, ECC menggunakan sepasang kunci, yaitu kunci publik dan kunci privat. Namun, ECC menawarkan tingkat keamanan yang lebih tinggi dengan ukuran kunci yang lebih kecil dibandingkan dengan RSA.(Kromodimoeljo, 2009)

Adapun cara kerja ECC adalah:

a. Pemilihan Kurva Eliptik:
   Memilih kurva eliptik yang sesuai dengan parameter keamanan yang diinginkan.
b. Pembangkitan Kunci:
   - ❖ Kunci Privat: Memilih secara acak sebuah bilangan bulat d sebagai kunci privat.
   - ❖ Kunci Publik: Menghitung titik P pada kurva eliptik dengan mengalikan titik basis G dengan skalar d: P = dG. Titik P adalah kunci publik.

c. Operasi Kriptografi:
   - ❖ Enkripsi: Pesan diubah menjadi titik pada kurva eliptik dan dienkripsi menggunakan kunci publik penerima.
   - ❖ Dekripsi: Penerima menggunakan kunci privatnya untuk mendekripsi pesan.
   - ❖ Tanda Tangan Digital: ECC juga digunakan untuk membuat tanda tangan digital yang memastikan integritas dan autentikasi data.

Keuntungan ECC adalah:

1. Keamanan yang Lebih Tinggi dengan Ukuran Kunci yang Lebih Kecil: ECC dapat memberikan tingkat keamanan yang sama dengan RSA dengan menggunakan kunci yang jauh lebih pendek.
2. Efisiensi Komputasi: Operasi pada kurva eliptik umumnya lebih cepat dibandingkan dengan operasi pada bilangan bulat besar yang digunakan dalam RSA.
3. Fleksibelitas: ECC dapat digunakan dalam berbagai aplikasi kriptografi, seperti enkripsi, tanda tangan digital, dan pertukaran kunci.

Contoh Penggunaan ECC adalah:

1. Kriptografi Bitcoin: ECC digunakan untuk mengamankan transaksi Bitcoin.
2. TLS/SSL: Banyak protokol TLS/SSL modern mendukung ECC untuk memberikan keamanan yang lebih kuat.
3. IoT: ECC sering digunakan dalam perangkat IoT karena kebutuhan akan ukuran kunci yang kecil dan efisiensi komputasi.

Perbandingan ECC dengan RSA.

Tabel 5. 1. Perbandingan ECC dengan RSA

Fitur	ECC	RSA
Ukuran Kunci	Lebih Kecil	Lebih Besar
Efisiensi Komputasi	Lebih Cepat	Lebih Lambat
Keamanan	Sama atau Lebih Baik	Sama

Soal Latihan

1. Apakah bilangan 97 adalah bilangan prima? Jelaskan.
2. Tentukan faktor prima dari 60.
3. Bagaimana cara mudah untuk memeriksa apakah suatu bilangan merupakan bilangan prima?
4. Berapakah sisa pembagian dari 101 jika dibagi 7?
5. Berapakah sisa pembagian dari 23^5 jika dibagi 11?
6. Tentukan bilangan asli terkecil n sehingga $2^n \equiv 1 \pmod{13}$.
7. Tentukan bilangan asli terkecil x yang memenuhi sistem kongruensi berikut: $x \equiv 2 \pmod 3$ $x \equiv 3 \pmod 5$ $x \equiv 5 \pmod 7$
8. Hitung sisa pembagian dari 5^{12} jika dibagi 13.
9. Tentukan bilangan asli terkecil x yang memenuhi sistem kongruensi berikut: $x \equiv 2 \pmod 3$ $x \equiv 3 \pmod 5$ $x \equiv 5 \pmod 7$
10. Hitung FPB dari 105 dan 147 menggunakan Algoritma Euclid.
11. Tentukan apakah pasangan bilangan berikut relatif prima:
    a. 17 dan 23
    b. 25 dan 35
12. Apa yang dimaksud dengan kunci publik dan kunci privat dalam RSA? Bagaimana cara keduanya dibangkitkan?

13. Apa yang membuat algoritma RSA sulit dipecahkan? Jelaskan peran faktorisasi bilangan bulat besar dalam keamanan RSA.
14. Sebutkan beberapa aplikasi RSA dalam kehidupan sehari-hari.
15. Jelaskan bagaimana Algoritma Diffie-Hellman dapat digunakan untuk menjamin kerahasiaan komunikasi dalam protokol SSL/TLS.
16. Misalkan Alice dan Bob memilih bilangan prima p = 23, bilangan primitif g = 5, dan bilangan acak masing-masing a = 6 dan b = 7. Hitunglah kunci rahasia yang dihasilkan.
17. Apa itu Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)? Apa kelebihan ECDH dibandingkan Diffie-Hellman standar?
18. Jelaskan secara detail apa yang dimaksud dengan kurva eliptik dalam konteks kriptografi. Bagaimana persamaan kurva eliptik berbeda dengan persamaan yang biasa kita temui dalam aljabar?
19. Diberikan persamaan kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b \pmod p$, dengan nilai a, b, dan p tertentu. Jelaskan bagaimana cara melakukan operasi penjumlahan dan penggandaan titik pada kurva eliptik.
20. Sebutkan beberapa aplikasi ECC dalam dunia nyata, selain kriptografi.

DAFTAR PUSTAKA

Akbar, F. Y. (2021). *Teori Bilangan dalam Ilmu Kriptografi*. *24*, 5.

Juari, A. (n.d.). *Aplikasi Teori Bilangan Dalam Kriptografi Kunci Publik Dan Algoritma Diffie-Hellman*. 1–11.

Kromodimoeljo, S. (2009). *Teori&aplikasi*.

Nurhardiani, Putrawangsa, S., & Syawahid, M. (2011). Teori Bilangan. In *Universitas Negri Yogyakarta* (Issue Bagian 2). https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Teori-Bilangan-2020-%0ABagian3.pdf

Parama, R. I. (2017). Aplikasi Teori Bilangan Dalam Kriptografi Kunci. In *Informatika.Stei.Itb.Ac.Id* (pp. 1–5). https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2006-2007/Makalah/Makalah0607-55.pdf

Waluyo, E., & Supiyati, S. (n.d.). *Teori bilangan*.

INDEKS

A

Algoritma, iii, 110, 119, 120, 122, 124, 125, 128, 129, 130
Asumsi, 101

B

Bilangan bulat, 111, 115
Bilangan prima, 111, 112, 114, 116
Bilangan prima kembar, 114
Bilangan prima komposit, 112
Bilangan prima minimal, 111
Bilangan prima relatif, 112
Bilangan prima sederhana, 112

D

Domain, 19, 20, 21, 22, 28

F

Fungsi, iii, 6, 7, 8, 16, 20, 63, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 117

I

Identitas Pascal, 97, 98
Interpretasi, 19, 20

K

Kombinasi, iii, 88, 104
Kombinatorika, iii, 83, 84
Kongruensi, iii, 115
Konstanta, 5, 6, 7, 8, 19
Kontraposisi, 25
Kuantor, 8, 11, 28
Kunci publik, 123

L

Logika Predikat, ii, v, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 19, 22

P

Permutasi, iii, 84, 104
Predikat, 3, 10, 12, 20
Preposisi, 85, 88
Prinsip Pigeonhole, iii, 83, 99, 100, 103, 104

R

Refleksif, 59, 115

S

Simetris, iv, 43, 59, 115, 122

T

Teori Graf, ii, 29
Term, 4, 6, 7
Transitif, 59, 115

V

Variabel, 5, 7, 8, 11, 15, 20

GLOSARIUM

Domain: Himpunan objek yang menjadi pembicaraan dalam interpretasi logika predikat.

Formula WFF: Ekspresi logis yang dibangun sesuai dengan aturan sintaks logika predikat. Contoh: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Fungsi: Simbol yang memetakan satu atau lebih objek ke objek lain. Contoh: f(x),g(x,y).

Interpretasi: Pemberian makna pada simbol-simbol dalam logika predikat dengan menentukan domain, konstanta, fungsi, dan predikat.

Konstanta: Simbol yang mewakili objek tertentu dalam domain. Contoh: a,b,c.

Kuantor: Simbol yang digunakan untuk menyatakan jumlah objek yang memenuhi suatu predikat.

- Kuantor Universal ($\forall$): "Untuk semua" atau "setiap".
- Kuantor Eksistensial ($\exists$): "Ada" atau "beberapa".

Logika Predikat: Sistem logika yang memungkinkan penggunaan variabel, konstanta, fungsi, dan predikat untuk menyatakan pernyataan yang lebih kompleks daripada logika proposisional.

Predikat: Simbol yang merepresentasikan hubungan atau sifat yang dapat bernilai benar atau salah. Contoh: P(x),Q(x,y).

Term: Ekspresi dalam logika predikat yang dapat berupa variabel, konstanta, atau fungsi yang diterapkan pada term lain. Contoh: x,f(a),g(x,y).

Variabel: Simbol yang mewakili objek dalam domain pembicaraan. Contoh: x,y,z.

Ajasensi: Kedudukan dua titik, seperti P dan Q, yang terhubung dengan sebuah sisi e.

Derajat Titik: Banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik.

Graph: Himpunan titik dari objek ($V = \{v_1, v_2, ...\}$) dan himpunan sisi dari objek lain ($E = \{e_1, e_2, ...\}$) yang dihubungkan dengan suatu pasangan titik tak terurut (v_i, v_j) di tiap sisi e_k.

Graph Berarah: Suatu graph yang sisi-sisinya mempunyai arah.

Graph Berarah Simetris: Suatu graph berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.

Graph Bertanda S: Jaringan kerja tidak berarah dengan nilai fungsi +1 atau -1.

Graph Hingga: Sebuah graph G (V, E) dengan V dan E hingga.

Graph Nol: Sebuah graph G = (V, E) dengan E = 0.

Graph Sederhana: Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.

Graph Tak Hingga: Sebuah graph G (V, E) dengan V dan E tak hingga.

Insidensi: Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e.

Jaringan Kerja: Sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.

Jaringan Kerja Berarah: Jaringan kerja yang merupakan graph berarah.

Jaringan Kerja Tidak Berarah: Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph.

Loop: Sisi yang dua titik ujungnya sama.

Seri: Dua sisi yang saling berajasensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu.

Sisi Paralel: Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.

Titik Anting/Ujung: Sebuah titik yang berderajat satu.

Titik Terisolasi: Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.

Valensi: Derajat suatu titik.

Kombinatorika: Cabang matematika yang mempelajari cara menghitung, menyusun, dan menganalisis kemungkinan kombinasi atau pengaturan elemen dalam suatu himpunan.

Probabilitas: Cabang matematika yang mempelajari kemungkinan terjadinya suatu peristiwa, biasanya dinyatakan dalam nilai antara 0 (tidak mungkin terjadi) hingga 1 (pasti terjadi).

Algoritma: Sekumpulan langkah-langkah atau prosedur sistematis yang digunakan untuk menyelesaikan masalah atau melakukan perhitungan.

Teori Graf: Cabang matematika yang mempelajari struktur graf, yang terdiri dari simpul (vertex) dan sisi (edge) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.

Asumsi: Pernyataan yang diterima sebagai benar tanpa perlu pembuktian sebagai dasar dalam analisis atau pemikiran logis.

Preposisi: Pernyataan dalam logika matematika yang memiliki nilai kebenaran, yaitu benar atau salah, tetapi tidak keduanya sekaligus.

Permutasi: susunan objek dengan urutan diperhatikan

Kombinasi: pemilihan objek tanpa memperhatikan urutan

Prinsip Pigeonhole: Jika n objek dimasukkan ke dalam m tempat dan $n > m$, maka setidaknya satu tempat berisi lebih dari satu objek. Konsep ini berguna dalam analisis kombinatorial dan probabilitas.

Identitas Pascal: aturan dalam kombinatorika yang menyatakan bahwa setiap bilangan dalam segitiga Pascal merupakan jumlah dari dua bilangan di atasnya secara langsung.

Kontraposisi: metode logika di mana suatu pernyataan "Jika P maka Q" dapat diubah menjadi "Jika tidak Q maka tidak P" dengan tetap memiliki nilai kebenaran yang sama.

Akar primitif: Bilangan yang pangkatnya menghasilkan semua bilangan bulat dari 1 hingga p-1 modulo p.

Algoritma: Urutan langkah-langkah logis yang digunakan untuk menyelesaikan masalah.

Algoritma RSA: salah satu algoritma kriptografi kunci publik yang paling populer dan banyak digunakan.

Algoritma Diffie-Hellman: sebuah protokol kriptografi yang memungkinkan dua pihak untuk menyepakati sebuah kunci rahasia secara aman, meskipun berkomunikasi melalui saluran yang tidak aman.

Bilangan prima palindrom: Bilangan prima yang sama jika dibaca dari depan maupun belakang.

Ciphertext: Data yang telah dienkripsi.

Dekripsi: Proses mengubah ciphertext kembali menjadi informasi yang dapat dipahami (plaintext).

Enkripsi: Proses mengubah informasi menjadi kode yang sulit dipahami (ciphertext).

Euclid: Nama seorang matematikawan Yunani kuno yang pertama kali merumuskan algoritma ini.

ECC: Algoritma kriptografi kunci publik yang menggunakan sifat-sifat kurva eliptik.

Fungsi Euler (φ(n)): Menghitung jumlah bilangan positif yang kurang dari atau sama dengan n dan koprima dengan n.

Greatest Common Divisor (GCD) atau Faktor Persekutuan Terbesar (FPB): Bilangan bulat positif terbesar yang dapat membagi habis dua bilangan bulat lainnya tanpa sisa.

Kongruensi modular: Hubungan kesamaan antara sisa pembagian dua bilangan.

Koprima: Dua bilangan dikatakan koprima jika tidak memiliki faktor persekutuan selain 1.

Kriptografi: Ilmu yang mempelajari teknik-teknik pengamanan informasi.

Kurva eliptik: Sebuah kurva matematika yang didefinisikan oleh persamaan tertentu. Bentuknya tidak selalu berbentuk elips.

Logaritma diskrit: Operasi invers dari eksponenasi modulo.

Modulo (mod): Bilangan pembagi yang digunakan untuk menentukan sisa pembagian.

Plaintext: Data asli yang belum dienkripsi.

Teorema Euclid: Terdapat tak hingga banyak bilangan prima.

Teorema Fermat: Hubungan antara eksponen, bilangan prima, dan kongruensi.

Teorema Euler: Generalisasi dari Teorema Fermat.

RSA: Algoritma kriptografi kunci publik yang menggunakan faktorisasi bilangan bulat besar sebagai dasar keamanannya.

BIODATA PENULIS

Dr. Juli Antasari Br Sinaga, M.Pd
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Penulis lahir di Perdagangan tanggal 15 April 1985. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Prodi Pendidikan Matematika di Universitas HKBP Nommensen pada tahun 2002 dan melanjutkan S2 pada Prodi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Medan pada tahun 2012. Melanjutkan S3 pada prodi ilmu matematika di Universitas Sumatera Utara pada tahun 2018. Penulis menekuni bidang menulis, khususnya dalam pengembangan materi ajar matematika. Beberapa karya tulisnya telah dipublikasikan dalam bentuk buku, jurnal ilmiah, dan modul pembelajaran. Selain aktif menulis, penulis juga terlibat dalam berbagai penelitian dan pengabdian masyarakat yang berkaitan dengan pendidikan matematika dan ilmu matematika.

BIODATA PENULIS

Dr. Lilis., S.Pd.,M.Pd
Dosen Program Studi KPNK (Ketatalaksanaan Pelayaran Niaga dan Kepelabuhan)
Politeknik Adiguna Maritim Indonesia (Poltek AMI) Medan

Penulis lahir di Medan, pada tanggal 21 Agustus 1976, merupakan anak pertama, empat bersaudara dari almarhum Bapak Suryadi dan almarhumah Ibunda Marlia. Mulai tahun 2017 sampai dengan sekarang penulis adalah dosen tetap di Politeknik Adiguna Maritim Indonesia (Poltek AMI) Medan, pada Program Studi KPNK (Ketatalaksanaan Pelayaran Niaga dan Kepelabuhan). Penulis menyelesaikan pendidikan pada tahun 2003 penulis mendapatkan gelar sarjana pendidikan matematika di Universitas Negeri Medan (UNIMED). Tahun 2016, penulis memperoleh Magister Pendidikan dari Universitas Negeri Medan (UNIMED). Pernah menjadi Guru SMA/K Swasta dari tahun 1997 s/d 2017 yang ada di kota Medan. Selanjutnya pada tahun 2018, penulis mengikuti pendidikan di Program Studi Doktor Ilmu Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara. Penulis menekuni bidang menulis,

khususnya dalam pengembangan mata kuliah matematika khusus bidang maritim. Beberapa karya tulisnya telah dipublikasikan dalam bentuk buku, prosiding,jurnal Nasional dan Internasional. Buku pertama penulis berjudul " Sikap dan Penalaran Siswa Belajar Matematika Dengan Mixed Model Pembelajaran" terbit di tahun 2023. Selain aktif menulis, penulis juga terlibat dalam berbagai penelitian dan pengabdian kepada masyarakat yang berkaitan dengan pendidikan matematika dan kemaritiman.

BIODATA PENULIS

Dr. Adi Suarman Situmorang, S.Pd., M.Pd
Dosen Program Studi Penddikan Matematika
Universitas HKBP Nommensen (UHN) Medan

Penulis lahir di Serdang, pada tanggal 18 Juli 1980, merupakan anak keenam dari enam bersaudara dari almarhum Bapak P. Situmorang Ibunda Almarhum B. Pandiangan. Mulai tahun 2005-2012 penulis menjadi dosen LLDIK Wilayah I untuk dpk Universitas Darma Agung. Sejak tahun 2013 sampai dengan sekarang penulis menjadi dosen LLDIK Wilayah I untuk dpk Universitas HKBP Nommensen. Penulis menyelesaikan pendidikan Sarjanan Pendidikan matematika dari Universitas Negeri Medan pada tahun 2004. Pada tahun 2013, penulis memperoleh Magister Pendidikan dari Universitas Negeri Medan (UNIMED). Selanjutnya pada tahun 2023, penulis menyelesaikan pendidikan di Program Studi Doktor Ilmu Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara. Penulis menekuni bidang menulis, khususnya dalam pengembangan mata kuliah matematika khusus pendidikan matematika. Selain aktif menulis, penulis juga terlibat dalam berbagai

penelitian dan pengabdian kepada masyarakat yang berkaitan dengan pendidikan matematika dan Ilmu Matematika.

BIODATA PENULIS

Mik Salmina, S.Pd., M.Mat
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas
Bina Bangsa Getsempena (UBBG)

Penulis dilahirkan di Aceh besar, 13 Desember 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP), Universitas Bina Bangsa Getsempena. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Magister Matematika. Penulis telah menghasilkan beberapa karya ilmiah baik yang dipublikasikan pada prosiding, buku, jurnal Nasional & Internasional yang bereputasi. Penulis sudah menekuni menulis sejak menjadi dosen. Buku pertamanya dengan judul Nilai Awal dan Syarat Batas pada tahun 2017. Pertengahan tahun 2018, penulis memenangkan hibah buku ajar "Struktur Aljabar: Tips Belajar Struktur Aljabar Untuk Calon Guru Matematika". Pada tahun 2019-2024 Penulis juga telah menerbitkan beberapa buku, diantaranya Kalkulus Integral, Multimedia Pembelajaran Matematika dengan Metode *Smart*, dan Pemodelan Dinamik: Pendekatan Khusus Pemodelan Matematika Bagi Pemula.

BIODATA PENULIS

Rektor Sianturi, S.Pd., M.Si
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Rektor Sianturi, Lahir di Pansur, 26 Mei 1981 sebagai anak ke 6 dari 7 bersaudara dari pasangan Alm. Bapak Mustar Sianturi dan Alm. Ibu Selma Silitonga. Pendidikan dasar penulis tempuh di SD Inpres Pansur di Kecamatan Tanah Jawa Kabupaten Simalungun, selesai pada Tahun 1993 melanjutkan sekolah di SMP Swasta HKBP Tanah Jawa Kabupaten Simalungun, selesai pada tahun 1996 melanjutkan sekolah di SMA Swasta Dharma Bakti Tanah Jawa, selesai pada Tahun 1999 melanjutkan kuliah di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas HKBP Nommensen dan selesai pada tahun 2004. Pada tahun 2013 melanjutkan ke Program Pasca Sarjana Universitas Sumatera Utara jurusan Matematika dan lulus pada tahun 2015. Pada tahun 2005 sampai dengan tahun 2021, penulis pernah bekerja sebagai guru matematika di SMA Swasta Teladan Pematangsiantar. Dan pada tahun 2009 sampai dengan tahun 2021, pernah bekerja sebagai guru di SMA Negeri 5 kota Pematangsiantar. Kemudian pada tahun 2021 sampai sekarang menjadi Dosen di Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar.