

- Aryo De Wibowo Muhammad Sidik
- Taufik Kurnia Azis
- Muhammad Syahrul Fauzie

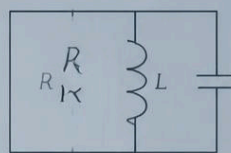
BUKU AJAR

ALJABAR LINEAR

UNTUK PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO

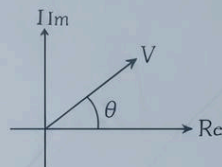
$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



$$T(x) = Ax$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



$$Ax = b$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = b_3$$

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow A^{-1} \text{ ada}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$AX = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ I_{n-1} \\ \vdots \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$



BUKU AJAR

ALJABAR LINEAR

UNTUK PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO

Aryo De Wibowo Muhammad Sidik
Taufik Kurnia Azis
Muhammad Syahrul Fauzie



GET PRESS INDONESIA

**BUKU AJAR
ALJABAR LINEAR
UNTUK PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO**

Penulis :

Aryo De Wibowo Muhammad Sidik
Taufik Kurnia Azis
Muhammad Syahrul Fauzie

ISBN : 978-634-255-734-1

Editor : Mila Sari, M. Si.

Desain Sampul dan Tata Letak : Ari Yanto, M.Pd.

PENERBIT : GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

Jl. Palarik RT 01 RW 06 Kelurahan Air Pacah
Kecamatan Koto Tangah Padang Sumatera Barat

website: www.getpress.co.id

email: adm.getpress@gmail.com

Cetakan pertama, September 2026

Hak cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga **Buku Ajar Aljabar Linear untuk Program Studi Teknik Elektro** ini dapat diselesaikan dengan baik. Buku ajar ini disusun untuk memenuhi kebutuhan literatur akademis yang komprehensif, terstruktur, dan relevan bagi mahasiswa Program Sarjana (S1) Teknik Elektro dalam memahami fondasi matematika modern.

Aljabar Linear bukan sekadar cabang matematika murni, melainkan bahasa dasar dan alat analisis utama dalam berbagai disiplin rekayasa elektro. Konsep-konsep seperti ruang vektor, transformasi linear, nilai dan vektor eigen, hingga ruang produk dalam kompleks (termasuk Matriks Hermitian, Unitary, dan Normal) memiliki penerapan langsung yang sangat krusial. Konsep-konsep ini menjadi landasan dalam analisis jaringan listrik AC, teori sistem dan kendali, pemrosesan sinyal digital, elektromagnetics, hingga teknologi komunikasi modern seperti *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO) dan sistem tenaga listrik pintar (*smart grid*).

Buku ajar ini dirancang dengan pendekatan konseptual dan aplikatif. Setiap bab disusun secara sistematis yang memuat:

1. **Landasan Teori yang Kokoh:** Penyajian definisi, teorema, dan bukti matematis secara runtut dan formal namun tetap mudah dipahami.
2. **Studi Kasus Rekayasa Elektro:** Solusi langkah-demi-langkah pada contoh soal yang mengintegrasikan aljabar linear ke dalam permasalahan riil teknik elektro.
3. **Penekanan Pemrosesan Komputasi:** Pengenalan dan representasi matematis yang siap diimplementasikan menggunakan perangkat lunak komputasi teknis.

Penulis menyadari bahwa penyusunan buku ajar ini tidak lepas dari dukungan, bimbingan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada rekan-rekan dosen di lingkungan Program Studi Teknik Elektro, para reviewer, serta para mahasiswa yang secara tidak langsung memberikan masukan berharga selama proses perkuliahan.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ajar ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun dari para pembaca, akademisi, dan praktisi sangat diharapkan demi penyempurnaan edisi-edisi mendatang.

Akhir kata, semoga buku ajar ini dapat memberikan manfaat yang sebesar-besarnya, menjadi sarana belajar yang efektif bagi mahasiswa, serta berkontribusi positif bagi kemajuan pendidikan dan perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Teknik Elektro di Indonesia.

Sukabumi, Juli 2026

Penulis

Daftar Isi

KATA PENGANTAR	iii
1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Konsep Sistem Persamaan Linear (SPL) .	2
1.2.1 Definisi SPL	2
1.2.2 Karakteristik Solusi SPL	3
1.3 Operasi Baris Elementer dan Matriks Diperbanyak	5
1.3.1 Representasi Matriks Diperbanyak	5
1.3.2 Operasi Baris Elementer (OBE) . .	5
1.4 Metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan	6
1.4.1 Bentuk Eselon Baris dan Eselon Baris Reduksi	6
1.4.2 Algoritma Eliminasi Gauss-Jordan	7
1.4.3 Contoh Soal dan Penyelesaian . . .	8
1.5 Matriks dan Operasi Matriks.....	11

1.5.1	Notasi dan Ukuran Matriks	11
1.5.2	Operasi Dasar Aljabar Matriks	12
1.6	Aplikasi Aljabar Linear dalam Teknik Elek- tro: Analisis Rangkaian Listrik.....	13
1.6.1	Hukum Kirchhoff.....	13
1.6.2	Pemodelan Kasus Rangkaian Listrik	14
1.6.3	Langkah Penyelesaian dengan Eli- minasi Gauss	14
1.7	Latihan Soal Mandiri	17
2	DETERMINAN	19
2.1	Pendahuluan	19
2.2	Fungsi Determinan Ekspansi Rumus.....	20
2.2.1	Determinan Matriks Ordo 2 kali 2 dan 3 kali 3.....	20
2.2.2	Sifat-Sifat Dasar Determinan	21
2.3	Evaluasi Determinan dengan Reduksi Baris (OBE).....	22
2.3.1	Determinan Matriks Segitiga	22
2.3.2	Pengaruh OBE terhadap Nilai De- terminan	22
2.4	Ekspansi Kofaktor dan Aturan Cramer	23
2.4.1	Minor dan Kofaktor	24
2.4.2	Teorema Ekspansi Kofaktor (Eks- pansi Laplace).....	24

2.4.3	Aturan Cramer (<i>Cramer's Rule</i>) . .	25
2.5	Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Arus Mesh Rangkaian Jembatan	25
2.5.1	Langkah 1: Menghitung Determinan Utama $\det(A)$	26
2.5.2	Langkah 2: Menghitung Determinan Kolom Pertama $\det(A_1)$	28
2.5.3	Langkah 3: Menghitung Nilai Arus I_1	28
2.6	Latihan Soal Mandiri.....	29

3 VEKTOR DI RUANG DIMENSI-2, DIMENSI-3, DAN DIMENSI-N **31**

3.1	Pendahuluan.....	31
3.2	Geometri Vektor di Ruang Dimensi-2 dan Dimensi-3	32
3.2.1	Notasi dan Komponen Vektor	32
3.2.2	Operasi Dasar Vektor.....	33
3.2.3	Norm (Panjang) Vektor.....	33
3.3	Perkalian Titik (<i>Dot Product</i>) dan Proyeksi	34
3.3.1	Definisi Aljabar dan Geometris Perkalian Titik	34
3.3.2	Ortogonalitas.....	35
3.3.3	Proyeksi Ortogonal.....	35
3.4	Perkalian Silang (<i>Cross Product</i>)	36
3.4.1	Definisi Perkalian Silang.....	36

3.5	Aplikasi Teknik Elektro: Gaya Lorentz pada Partikel Bermuatan	37
3.5.1	Model Fisika Elektromagnetik	37
3.5.2	Contoh Kasus dan Solusi Numerik	38
3.6	Vektor di Ruang Dimensi- n	39
3.6.1	Definisi Ruang Euclidean Dimensi- n	40
3.6.2	Metrik Jarak dan Norm di Ruang- kat n	40
3.7	Latihan Soal Mandiri	41
4	RUANG VEKTOR UMUM	43
4.1	Pendahuluan	43
4.2	Ruang Vektor Real	44
4.2.1	Aksioma Ruang Vektor	44
4.2.2	Contoh Ruang Vektor dalam Teknik Elektro	45
4.3	Subruang (<i>Subspaces</i>)	46
4.3.1	Definisi Subruang	46
4.3.2	Contoh Subruang	47
4.4	Kombinasi Linear dan Rentang (<i>Span</i>)	47
4.4.1	Kombinasi Linear	48
4.4.2	Rentang (<i>Span</i>)	48
4.5	Kebebasan Linear (<i>Linear Independence</i>)	48
4.5.1	Definisi Kebebasan Linear	49
4.6	Basis dan Dimensi	49

4.6.1	Definisi Basis	49
4.6.2	Dimensi	50
4.7	Aplikasi Teknik Elektro: Kombinasi Linear Sinyal Sinusoidal	50
4.7.1	Model Matematika	50
4.7.2	Contoh Soal dan Pembuktian.....	51
4.8	Latihan Soal Mandiri.....	53
5	NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN	55
5.1	Pendahuluan.....	55
5.2	Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen	56
5.2.1	Definisi Formal.....	56
5.2.2	Syarat Eksistensi Solusi	56
5.3	Menghitung Nilai Eigen dan Ruang Eigen	57
5.3.1	Contoh Kasus Perhitungan.....	58
5.4	Diagonalisasi Matriks.....	60
5.4.1	Teorema Diagonalisasi.....	60
5.5	Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Transien Rangkaian Ruang Keadaan (<i>State-Space</i>) .	61
5.5.1	Pemodelan Sistem Dinamis	61
5.5.2	Contoh Kasus Rangkaian RL-RC Campuran	63
5.6	Latihan Soal Mandiri.....	65
6	RUANG HASIL KALI DALAM	67
6.1	Pendahuluan.....	67
6.2	Definisi Ruang Hasil Kali Dalam	68

6.2.1	Aksioma Hasil Kali Dalam Real.....	68
6.2.2	Contoh Hasil Kali Dalam Fungsi Kontinu	69
6.3	Sudut, Panjang, dan Ortogonalitas	70
6.3.1	Norm (Panjang) Vektor	70
6.3.2	Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut	70
6.3.3	Ortogonalitas	71
6.4	Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt	71
6.4.1	Himpunan Ortonormal	71
6.4.2	Proses Ortogonalisasi Gram-Schmidt	72
6.5	Aplikasi Teknik Elektro 1: Ortogonalitas Sinyal AC dan Deret Fourier	73
6.5.1	Pembuktian Ortogonalitas Fungsi Sinusoidal	73
6.6	Aplikasi Teknik Elektro 2: Metode Kua- drat Terkecil (<i>Least Squares</i>) untuk Esti- masi Sensor	75
6.6.1	Model Matematika Sistem	75
6.6.2	Contoh Kasus Kalibrasi Linear	76
6.7	Latihan Soal Mandiri	77

7 DIAGONALISASI ORTOGONAL DAN BENTUK KUADRATIK 79

7.1	Pendahuluan	79
7.2	Matriks Simetris dan Diagonalisasi Ortogonal	80
7.2.1	Definisi Matriks Simetris	80

7.2.2	Teorema Spektra untuk Matriks Simetris.....	80
7.2.3	Diagonalisasi Ortogonal.....	81
7.3	Prosedur Diagonalisasi Ortogonal.....	81
7.4	Bentuk Kuadratik (<i>Quadratic Forms</i>).....	82
7.4.1	Representasi Matriks.....	83
7.4.2	Teorema Sumbu Utama (<i>Principal Axes Theorem</i>).....	83
7.5	Klasifikasi Kodefinitan Bentuk Kuadratik .	84
7.6	Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Kestabilan Sistem Non-Linear Menggunakan Fungsi Lyapunov.....	84
7.6.1	Formulasi Fungsi Energi Lyapunov	85
7.6.2	Contoh Analisis Kasus.....	86
7.7	Latihan Soal Mandiri.....	88

8 TRANSFORMASI LINEAR UMUM 90

8.1	Pendahuluan.....	90
8.2	Definisi dan Sifat Dasar.....	91
8.2.1	Aksioma Transformasi Linear.....	91
8.2.2	Sifat-Sifat Teorematik	92
8.3	Kernel dan Range	92
8.3.1	Kernel (<i>Inti</i>).....	93
8.3.2	Range (<i>Jangkauan/Citra</i>).....	93
8.3.3	Teorema Dimensi (Rank-Nullity) .	94
8.4	Representasi Matriks untuk Transformasi Linear Umum	94

8.4.1	Formulasi Matriks Transformasi T .	94
8.5	Aplikasi Teknik Elektro: Pemodelan Operator Diferensial Rangkaian Op-Amp Aktif	95
8.5.1	Model Fisika Rangkaian	96
8.5.2	Pembuktian Sifat Linearitas Operator Diferensial	97
8.5.3	Representasi Matriks Operator Diferensial	97
8.6	Latihan Soal Mandiri	99

9 SISTEM DINAMIS, RANTAI MARKOV, DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

9.1	Pendahuluan	101
9.2	Sistem Dinamis Linear Diskret	102
9.2.1	Formulasi Matematika	102
9.2.2	Analisis Lintasan Menggunakan Diagonalisasi	103
9.2.3	Kestabilan Sistem Diskret.....	104
9.3	Rantai Markov (<i>Markov Chains</i>).....	104
9.3.1	Matriks Probabilitas Transisi.....	105
9.3.2	Vektor Keadaan Probabilitas dan Kondisi Mapan (<i>Steady-State</i>) . . .	105
9.4	Sistem Persamaan Diferensial Linear Kontinu	106
9.4.1	Representasi Ruang Keadaan (<i>State-Space Representation</i>)	106
9.4.2	Solusi Menggunakan Pendekatan Nilai Eigen Kompleks.....	107

9.5	Aplikasi Teknik Elektro.....	108
9.5.1	Kasus 1: Pemodelan Trafik Paket Data pada Router Jaringan	108
9.5.2	Kasus 2: Respons Transien Rang- kaian Resonator RLC.....	110
9.6	Latihan Soal Mandiri.....	113

10 RUANG VEKTOR KOMPLEKS DAN APLIKASINYA DALAM TEKNIK ELEKTRO 115

10.1	Pendahuluan.....	115
10.2	Tinjauan Ulang Bilangan Kompleks dalam Notasi Teknik Elektro	116
10.3	Ruang Vektor Kompleks C pangkat n.....	117
10.3.1	Vektor dalam C pangkat n.....	117
10.3.2	Sifat-Sifat Aljabar Konjugat Kom- pleks	118
10.4	Hasil Kali Dalam Euclidean Kompleks.....	118
10.4.1	Definisi Hasil Kali Dalam Kompleks	119
10.4.2	Norma Euclidean Kompleks.....	119
10.5	Nilai Eigen dan Vektor Eigen Kompleks .	120
10.5.1	Teorema Nilai Eigen Konjugat.....	120
10.6	Aplikasi Rangkaian Listrik AC dan Analisis Fasor.....	120
10.7	Studi Kasus dan Penyelesaian Detail	121
10.7.1	Kasus 1: Hasil Kali Dalam dan Nor- ma di C pangkat 3.....	121

10.7.2 Kasus 2: Analisis Jaringan Distri-	
busi Daya Dua Node	123
10.8 Latihan Soal Mandiri	124

11 RUANG HASIL KALI DALAM DAN APLIKASINYA 126

11.1 Pendahuluan	126
11.2 Definisi dan Aksioma Hasil Kali Dalam.....	127
11.2.1 Norma dan Jarak dalam Ruang Ha-	
sil Kali Dalam.....	127
11.2.2 Hasil Kali Dalam Euclidean Berbobot	128
11.3 Ortogonalitas dan Proses Gram-Schmidt .	128
11.3.1 Himpunan Ortonormal.....	129
11.3.2 Proses Gram-Schmidt.....	129
11.4 Metode Kuadrat Terkecil (Least Squares	
Approximation)	130
11.5 Aplikasi: Representasi Deret Fourier . . .	130
11.6 Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail	131
11.6.1 Kasus 1: Ortogonalisasi Sinyal	
Pembawa Komunikasi (Gram-	
Schmidt)	131
11.6.2 Kasus 2: Estimasi Karakteristik	
Termal Transistor Daya (Least Squ-	
ares)	133
11.7 Latihan Soal Mandiri.....	135

12 PENDEKATAN FUNGSI DAN DERET

FOURIER **136**

12.1	Pendahuluan.....	136
12.2	Pendekatan Kuadrat Terkecil pada Ruang Fungsi.....	137
12.3	Subruang Trigonometri dan Formulasi De- ret Fourier	138
12.3.1	Ortogonalitas Himpunan Trigo- metri.....	138
12.3.2	Koefisien Fourier	139
12.4	Analisis Galat Kuadrat Rata-Rata (<i>Mean Square Error</i>)	140
12.5	Aplikasi Teknik Elektro: Aproksimasi Si- nyal Gelombang Gigi Gergaji (<i>Sawtooth Wave</i>)	141
12.6	Latihan Soal Mandiri	144

13 DIAGONALISASI ORTOGONAL, BEN- TUK KUADRATIK, DAN MATRIKS KHUSUS **145**

13.1	Pendahuluan	145
13.2	Matriks Ortogonal.....	146
13.2.1	Sifat-Sifat Matriks Ortogonal	146
13.3	Diagonalisasi Ortogonal dan Matriks Simetris	147
13.3.1	Teorema Spektra Matriks Simetris	147
13.4	Bentuk Kuadratik.....	148
13.4.1	Teorema Sumbu Utama (<i>Principal Axes Theorem</i>)	148

13.4.2	Klasifikasi Bentuk Kuadratik.....	149
13.5	Optimasi Menggunakan Bentuk Kuadratik	149
13.6	Matriks Hermitian, Unitary, dan Normal (Domain Kompleks)	150
13.6.1	Matriks Hermitian	151
13.6.2	Matriks Unitary.....	151
13.6.3	Matriks Normal.....	151
13.7	Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail	152
13.7.1	Kasus 1: Diagonalisasi Ortogonal Matriks Kopling Impedansi Jaringan	152
13.7.2	Kasus 2: Klasifikasi Definit Tingkat Energi Kapasitor	154
13.8	Latihan Soal Mandiri.....	155

14 MATRIKS HERMITIAN, UNITARY, DAN NORMAL 157

14.1	Pendahuluan.....	157
14.2	Matriks Hermitian dan Spektrum Nilai Eigen	158
14.2.1	Definisi Matriks Hermitian	158
14.2.2	Teorema Nilai Eigen Matriks Her- mitian	159
14.3	Matriks Skew-Hermitian	159
14.3.1	Sifat Nilai Eigen Skew-Hermitian	160
14.4	Matriks Unitary.....	160
14.4.1	Karakteristik Spektral dan Konse- rvasi Energi.....	161
14.5	Matriks Normal dan Diagonalisasi Unitary	161

14.5.1	Diagonalisasi Unitary.....	162
14.6	Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail	162
14.6.1	Kasus 1: Spektrum Nilai Eigen Ma- triks Impedansi Jaringan AC.....	162
14.6.2	Kasus 2: Matriks Transmisi Salur- an MIMO Tanpa Rugi-Rugi (Lossless)	164
14.7	Latihan Soal Mandiri.....	165
	DAFTAR PUSTAKA.....	167

GLOSARIUM	169
BIODATA PENULIS	173
SINOPSIS BUKU	177

Daftar Tabel

1.1	Klasifikasi Geometris Solusi SPL	4
2.1	Pengaruh Operasi Baris Elementer (OBE) pada Determinan.....	24
7.1	Klasifikasi Kodefinitan Bentuk Kuadratik .	84

BAB 1

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS

1.1 Pendahuluan

Sistem Persamaan Linear (SPL) merupakan salah satu pilar matematika yang paling krusial dalam ilmu rekayasa, khususnya pada bidang Teknik Elektro. Banyak representasi fisik dari sistem elektrik—seperti jaringan distribusi daya, pemrosesan sinyal digital, hingga pemodelan rangkaian listrik arus searah (DC) maupun arus bolak-balik (AC)—yang berujung pada penyelesaian sejumlah persamaan linear secara simultan.

Melalui bantuan matriks, sekumpulan persamaan linear yang rumit dapat direduksi ke dalam bentuk representasi numerik yang ringkas dan sistematis. Teknik representasi ini sangat krusial bagi seorang insinyur elektro untuk merancang algoritma komputer yang mampu memecahkan ribuan persamaan linear dalam hitungan milidetik. Pada bab ini, kita akan mempelajari konsep dasar SPL, penyelesaian SPL menggunakan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, pengenalan matriks beserta operasinya, serta aplikasinya langsung pada analisis rangkaian listrik.

1.2 Konsep Sistem Persamaan Linear (SPL)

Sebuah persamaan dikatakan linear dalam n variabel bebas $x_1, x_2, \dots, x_n$ jika persamaan tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk matematis berikut:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

di mana $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah koefisien konstan riil, dan b adalah konstanta di ruas kanan. Dalam kasus sederhana dengan dua atau tiga variabel, kita umumnya merepresentasikannya menggunakan variabel tanpa indeks, seperti x, y , dan z .

1.2.1 Definisi SPL

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah himpunan berhingga yang terdiri dari beberapa persamaan linear dengan variabel-variabel tidak diketahui (*unknowns*) yang sama. Bentuk umum SPL yang terdiri dari m persamaan

dengan n variabel bebas adalah sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

(1.2)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sebuah solusi dari SPL di atas adalah urutan n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ sedemikian rupa sehingga jika kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$, maka setiap persamaan di dalam sistem tersebut bernilai benar.

1.2.2 Karakteristik Solusi SPL

Berdasarkan sifat solusinya, setiap SPL diklasifikasikan ke dalam dua kategori utama:

1. **Konsisten (*Consistent*):** Sistem memiliki setidaknya satu solusi (solusi tunggal atau tak hingga banyaknya solusi).
2. **Tidak Konsisten (*Inconsistent*):** Sistem sama sekali tidak memiliki solusi.

Secara geometris, untuk SPL dengan dua variabel bebas (merepresentasikan garis pada bidang xy) atau tiga variabel bebas (merepresentasikan bidang pada ruang

xyz), terdapat tepat tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi:

- **Tidak ada solusi:** Garis atau bidang sejajar dan tidak pernah saling berpotongan.
- **Satu solusi unik:** Garis atau bidang berpotongan tepat di satu titik.
- **Tak hingga solusi:** Garis atau bidang saling berhimpit satu sama lain.

Fenomena matematis ini diringkas pada tabel di bawah ini.

Tabel 1.1: Klasifikasi Geometris Solusi SPL

Kondisi Solusi	Representasi Geometris (Bidang 2D)
Konsisten (Tunggal)	Dua garis saling berpotongan di satu titik unik.
Konsisten (Tak Hingga)	Dua garis saling berhimpit (koinsiden).
Tidak Konsisten	Dua garis saling sejajar dan terpisah.

1.3 Operasi Baris Elementer dan Matriks Diperbanyak

Untuk menyelesaikan SPL berukuran besar secara efisien, kita merepresentasikan koefisien SPL ke dalam bentuk matriks yang ringkas, yang dinamakan **Matriks Diperbanyak** (*Augmented Matrix*).

1.3.1 Representasi Matriks Diperbanyak

Jika kita memiliki SPL pada persamaan (1.2), kita dapat menyajikannya dalam bentuk matriks diperbanyak dengan menghilangkan simbol variabel dan tanda sama dengan:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \quad (1.3)$$

1.3.2 Operasi Baris Elementer (OBE)

Metode sistematis untuk mereduksi matriks diperbanyak tanpa mengubah esensi solusi SPL asli didasarkan pada tiga jenis operasi aljabar yang diterapkan pada baris-baris matriks. Operasi ini dikenal sebagai **Operasi Baris Elementer (OBE)**:

1. Mengalikan satu baris dengan konstanta bukan nol ($R_i \leftarrow cR_i$).
2. Menukar posisi dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$).
3. Menambahkan kelipatan dari suatu baris ke baris lainnya ($R_i \leftarrow R_i + cR_j$).

1.4 Metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Tujuan utama penerapan OBE adalah membawa matriks diperbanyak ke dalam salah satu bentuk eselon agar nilai variabel tidak diketahui dapat ditentukan dengan mudah.

1.4.1 Bentuk Eselon Baris dan Eselon Baris Reduksi

Sebuah matriks dikatakan berada dalam **Bentuk Eselon Baris (Row Echelon Form)** jika memenuhi sifat-sifat berikut:

- Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka pertama yang bukan nol dari kiri adalah 1 (disebut *Leading 1* atau 1 utama).
- Jika ada baris yang seluruhnya nol, maka baris tersebut dikelompokkan bersama di bagian paling bawah matriks.

- Pada dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, *leading 1* pada baris yang lebih rendah terletak lebih ke kanan daripada *leading 1* pada baris di atasnya.

Jika matriks tersebut memenuhi semua sifat di atas ditambah dengan kondisi tambahan berikut, maka matriks berada dalam **Bentuk Eselon Baris Reduksi (*Reduced Row Echelon Form*)**:

- Setiap kolom yang memiliki *leading 1* harus memiliki angka nol di semua posisi lainnya pada kolom tersebut.

1.4.2 Algoritma Eliminasi Gauss-Jordan

Prosedur sistematis langkah-demi-langkah menggunakan OBE untuk mengubah matriks diperbanyak menjadi bentuk eselon baris reduksi dinamakan **Eliminasi Gauss-Jordan**. Algoritma ini terdiri dari dua fase utama:

1. **Fase Maju (*Forward Phase*)**: Mereduksi elemen di bawah *leading 1* menjadi nol untuk membentuk matriks eselon baris.
2. **Fase Mundur (*Backward Phase*)**: Mereduksi elemen di atas *leading 1* menjadi nol untuk menghasilkan bentuk eselon baris reduksi.

1.4.3 Contoh Soal dan Penyelesaian

Selesaikan SPL berikut menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Penyelesaian: Tuliskan bentuk matriks diperbanyak dari SPL di atas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan OBE fase maju:

- Kurangkan 2 kali baris pertama dari baris kedua ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Kurangkan 3 kali baris pertama dari baris ketiga

$$(R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1):$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk memperoleh *leading 1* ($R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

- Kurangkan 3 kali baris kedua dari baris ketiga ($R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris ketiga dengan -2 agar bernilai 1 ($R_3 \leftarrow -2R_3$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas sekarang telah berada dalam bentuk eselon baris. Sekarang kita lakukan fase mundur untuk memperoleh eselon baris reduksi:

- Tambahkan $\frac{7}{2}$ kali baris ketiga ke baris kedua ($R_2 \leftarrow R_2 + \frac{7}{2}R_3$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Kurangkan 2 kali baris ketiga dari baris pertama ($R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Kurangkan baris kedua dari baris pertama ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk eselon baris reduksi di atas, kita langsung mendapatkan solusi unik dari SPL:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

Atau dituliskan sebagai koordinat titik/vektor (1, 2, 3).

1.5 Matriks dan Operasi Matriks

Setelah memahami penggunaan matriks sebagai alat bantu visual penyelesaian SPL, sekarang kita mendalami konsep aljabar matriks sebagai objek matematika mandiri.

1.5.1 Notasi dan Ukuran Matriks

Matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan riil atau kompleks. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri atau elemen matriks. Matriks umumnya dinyatakan dengan huruf kapital tebal (seperti **A**, **B**, **C**).

Sebuah matriks **A** berukuran $m \times n$ (memiliki m baris dan n kolom) dapat ditulis secara eksplisit sebagai berikut:

$$A = [a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix} \quad (1.4)$$

di mana a_{ij} menyatakan entri pada baris ke- i dan kolom ke- j .

1.5.2 Operasi Dasar Aljabar Matriks

1. **Penjumlahan Matriks:** Dua buah matriks dapat dijumlahkan jika dan hanya jika keduanya memiliki ukuran yang sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.5)$$

2. **Perkalian Skalar:** Mengalikan matriks dengan suatu konstanta skalar k dilakukan dengan mengalikan setiap entri di dalamnya dengan k :

$$(k\mathbf{A})_{ij} = ka_{ij} \quad (1.6)$$

3. **Perkalian Dua Matriks:** Dua buah matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ dapat dikalikan (menghasilkan matriks $\mathbf{AB}$) jika dan hanya jika jumlah kolom dari faktor pertama $\mathbf{A}$ sama dengan jumlah baris dari faktor kedua $\mathbf{B}$. Jika $\mathbf{A}$ berukuran $m \times r$ dan $\mathbf{B}$ berukuran $r \times n$, maka produk $\mathbf{AB}$ adalah matriks berukuran $m \times n$. Entri pada baris i dan kolom j dihitung dengan ru-

mus:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \quad (1.7)$$

1.6 Aplikasi Aljabar Linear dalam Teknik Elektro: Analisis Rangkaian Listrik

Dalam Teknik Elektro, salah satu penerapan fundamental aljabar linear adalah penyelesaian masalah **Analisis Rangkaian Listrik** menggunakan Hukum Arus Kirchhoff (*Kirchhoff's Current Law / KCL*) dan Hukum Tegangan Kirchhoff (*Kirchhoff's Voltage Law / KVL*).

1.6.1 Hukum Kirchhoff

- **KCL (Hukum Arus):** Jumlah total arus yang memasuki sebuah simpul (*node*) sama dengan total arus yang keluar dari simpul tersebut.
- **KVL (Hukum Tegangan):** Jumlah aljabar dari semua perbedaan potensial (tegangan) di sekitar lintasan tertutup (*loop*) dalam sebuah rangkaian adalah nol.

1.6.2 Pemodelan Kasus Rangkaian Listrik

Perhatikan gambar diagram skematik rangkaian jembatan-resistor berikut yang memiliki tiga buah arus cabang independen, I_1 , I_2 , dan I_3 . Dari hasil penerapan KCL dan KVL diperoleh model tiga persamaan linear simultan sebagai berikut:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$4I_1 + 2I_2 = 8$$

$$2I_2 + 8I_3 = 12$$

Kita ingin mencari besarnya masing-masing arus cabang I_1 , I_2 , dan I_3 dalam satuan Ampere (A).

1.6.3 Langkah Penyelesaian dengan Eliminasi Gauss

Tuliskan matriks diperbanyak untuk SPL arus rangkaian tersebut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Lakukan proses OBE untuk mereduksi elemen di ba-

wah *leading 1*:

- Kurangkan 4 kali baris pertama dari baris kedua ($R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

- Untuk mempermudah perhitungan, tukar posisi baris kedua dan baris ketiga ($R_2 \leftrightarrow R_3$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris kedua dengan $\frac{1}{2}$ untuk mendapatkan *leading 1* di kolom kedua ($R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Kurangkan 6 kali baris kedua dari baris ketiga

$$(R_3 \leftarrow R_3 - 6R_2):$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -28 & -28 \end{bmatrix}$$

- Kalikan baris ketiga dengan $-\frac{1}{28}$ ($R_3 \leftarrow -\frac{1}{28}R_3$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rangkaian matriks kini berada dalam bentuk eselon baris. Kita dapat langsung melakukan teknik **Substitusi Balik** (**Back-Substitution**):

1. Dari baris 3 diperoleh: $I_3 = 1$ A.
2. Substitusikan ke baris 2: $I_2 + 4(1) = 6 \implies I_2 = 2$ A.
3. Substitusikan ke baris 1: $I_1 - 2 + 1 = 0 \implies I_1 = 1$ A.

Dengan demikian, solusi arus listrik pada cabang rangkaian adalah:

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = 1 \text{ A} \quad (1.8)$$

1.7 Latihan Soal Mandiri

1. Tentukan apakah matriks-matriks berikut berada dalam bentuk eselon baris, eselon baris reduksi, keduanya, atau tidak sama sekali:

$$\begin{array}{lll} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{a) } & \text{b) } & \text{c) } \end{array}$$

2. Selesaikan SPL berikut menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

3. Rancang matriks diperbanyak untuk menganalisis arus loop pada suatu sistem pemancar nirkabel yang memiliki model SPL berikut, lalu tentukan nilai ku-

at arus masing-masing menggunakan OBE:

$$I_1 - 2I_2 + I_3 = -3$$

$$2I_1 + I_2 = 0$$

$$-3I_2 + 4I_3 = 1$$

BAB 2

DETERMINAN

2.1 Pendahuluan

Dalam analisis sistem fisik linear, seorang insinyur elektro sering kali dihadapkan pada sekumpulan persamaan simultan yang merepresentasikan hukum alam, seperti interaksi arus dan tegangan pada komponen pasif rangkaian. Salah satu alat matematika paling kuat untuk menganalisis karakteristik sistem persamaan tersebut tanpa harus menyelesaikannya secara langsung adalah **determinan**.

Determinan adalah suatu fungsi skalar yang memetakan setiap matriks persegi (matriks berukuran $n \times n$) ke dalam satu bilangan riil atau kompleks. Melalui determinan, kita dapat langsung mengetahui apakah suatu sistem rangkaian listrik memiliki solusi tunggal yang stabil, bersifat singular (tidak stabil/tidak konsisten), atau mengukur perubahan faktor skala dalam transformasi domain frekuensi (seperti pada transformasi Fourier dan Laplace). Bab ini akan membahas secara mendalam definisi fungsi determinan, metode evaluasi baris (OBE), ekspansi kofaktor, hingga penerapan praktisnya dalam penyelesaian analisis arus mesh rangkaian menggunakan Aturan Cramer.

2.2 Fungsi Determinan Ekspansi Rumus

Kita mulai dengan mendefinisikan determinan untuk dimensi paling mendasar (2×2 dan 3×3), sebelum memperluasnya ke dimensi yang lebih tinggi ($n \times n$).

2.2.1 Determinan Matriks Ordo 2×2 dan 3×3

Diberikan sebuah matriks berukuran 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Determinan dari matriks $\mathbf{A}$, yang dinotasikan dengan $\det(\mathbf{A})$ atau $|\mathbf{A}|$, didefinisikan secara aljabar sebagai:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.2)$$

Untuk matriks berukuran 3×3 :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Kita dapat menghitung determinannya menggunakan metode perkalian silang diagonal klasik yang dikenal sebagai

Metode Sarrus:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) = & b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} \\ & - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\end{aligned}\quad (2.4)$$

2.2.2 Sifat-Sifat Dasar Determinan

Berikut adalah sifat-sifat aljabar esensial determinan yang berlaku untuk semua matriks persegi:

- **Matriks Identitas:** Determinan dari matriks identitas $\mathbf{I}$ selalu bernilai satu, yaitu $\det(\mathbf{I}) = 1$.
- **Transpose Matriks:** Nilai determinan suatu matriks sama dengan determinan dari hasil transpose-nya:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) \quad (2.5)$$

- **Perkalian Matriks:** Determinan dari perkalian dua buah matriks persegi berukuran sama adalah hasil kali masing-masing determinannya:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (2.6)$$

2.3 Evaluasi Determinan dengan Reduksi Baris (OBE)

Menghitung determinan matriks berukuran besar ($n \geq 4$) menggunakan rumus permutasi langsung secara komputasi sangatlah berat karena kompleksitasnya mencapai $O(n!)$. Pendekatan yang jauh lebih efisien adalah mereduksi matriks menggunakan **Operasi Baris Elementer (OBE)** ke bentuk matriks segitiga.

2.3.1 Determinan Matriks Segitiga

Jika sebuah matriks **A** berukuran $n \times n$ berbentuk segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal, maka nilai determinannya merupakan hasil kali dari seluruh elemen diagonal utamanya:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn} \quad (2.7)$$

2.3.2 Pengaruh OBE terhadap Nilai Determinan

Ketika kita melakukan OBE pada suatu matriks persegi untuk membawanya ke bentuk segitiga atas, nilai determinan matriks awal akan berubah sesuai aturan berikut:

1. **Pertukaran Dua Baris ($R_i \leftrightarrow R_j$):** Jika matriks

B diperoleh dari menukar posisi dua baris matriks **A**, maka:

$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A}) \quad (2.8)$$

2. **Perkalian Baris dengan Skalar ($R_i \leftarrow kR_i$):** Jika matriks **B** diperoleh dari mengalikan satu baris matriks **A** dengan konstanta skalar k , maka:

$$\det(\mathbf{B}) = k \det(\mathbf{A}) \quad (2.9)$$

3. **Penjumlahan Kelipatan Baris ($R_i \leftarrow R_i + kR_j$):** Jika matriks **B** diperoleh dari menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya pada matriks **A**, nilai determinannya **tidak berubah**:

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \quad (2.10)$$

Tabel berikut meringkas pengaruh operasi baris terhadap determinan:

2.4 Ekspansi Kofaktor dan Aturan Cramer

Metode lain yang sangat representatif secara analitis adalah menggunakan minor dan kofaktor untuk mereduksi dimensi matriks secara rekursif.

Tabel 2.1: Pengaruh Operasi Baris Elementer (OBE) pada Determinan

Operasi Baris	Efek pada Determinan (det(B))	Determinan Baru
Menukar dua baris	$\det(\mathbf{B}) = - \det(\mathbf{A})$	
Mengalikan baris dengan k	$\det(\mathbf{B}) = k \det(\mathbf{A})$	
Menambah kelipatan baris lain	$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$	

2.4.1 Minor dan Kofaktor

Jika **A** adalah matriks persegi, maka **Minor** M_{ij} dari entri a_{ij} didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihapus dari **A**.

Nilai bilangan **Kofaktor** C_{ij} didefinisikan sebagai minor yang diberikan tanda arah posisi:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{2.11}$$

2.4.2 Teorema Ekspansi Kofaktor (Eks-pansi Laplace)

Determinan dari matriks **A** berukuran $n \times n$ dapat diperoleh dengan mengalikan entri-entri pada sembarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya, lalu menjumlahkan hasil kali tersebut:

- Ekspansi sepanjang baris ke- i :

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (2.12)$$

- Ekspansi sepanjang kolom ke- j :

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (2.13)$$

2.4.3 Aturan Cramer (*Cramer's Rule*)

Jika $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan linear dengan n variabel yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, maka sistem tersebut memiliki solusi unik yang diberikan oleh rumus:

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(\mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A})} \quad (2.14)$$

di mana $\mathbf{A}_j$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke- j dari matriks $\mathbf{A}$ dengan entri-entri pada matriks kolom $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$.

2.5 Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Arus Mesh Rangkaian Jembatan

Mari kita terapkan konsep determinan dan Aturan Cramer untuk memecahkan masalah praktis analisis rangka-

ian listrik. Perhatikan sebuah rangkaian jembatan yang disederhanakan. Dengan menggunakan **Analisis Mesh (Hukum Tegangan Kirchhoff)**, diperoleh sistem persamaan linear untuk tiga arus mesh independen (I_1, I_2, I_3) dalam satuan Ampere (A) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}10I_1 - 2I_2 - 8I_3 &= 12 \\-2I_1 + 12I_2 - 4I_3 &= 0 \\-8I_1 - 4I_2 + 15I_3 &= 0\end{aligned}$$

Kita akan menentukan besarnya arus mesh I_1 menggunakan Aturan Cramer.

2.5.1 Langkah 1: Menghitung Determinan Utama $\det(\mathbf{A})$

Matriks koefisien hambatan rangkaian adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -8 \\ -2 & 12 & -4 \\ -8 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

Kita hitung $\det(\mathbf{A})$ dengan ekspansi kofaktor sepan-

jang baris pertama:

$$\det(\mathbf{A}) = 10 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 15 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 15 \end{vmatrix} + (-8) \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$$

Hitung determinan submatriks 2×2 masing-masing:

$$\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 15 \end{vmatrix} = (12 \cdot 15) - (-4 \cdot -4) = 180 - 16 = 164$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 15 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 15) - (-4 \cdot -8) = -30 - 32 = -62$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 12 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = (-2 \cdot -4) - (12 \cdot -8) = 8 - (-96) = 104$$

Masukkan nilai-nilai tersebut ke persamaan utama:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 10(164) + 2(-62) - 8(104) \\ &= 1640 - 124 - 832 \\ &= 684 \end{aligned}$$

Karena $\det(\mathbf{A}) = 684 \neq 0$, rangkaian memiliki solusi arus yang unik dan stabil.

2.5.2 Langkah 2: Menghitung Deter- minan Kolom Pertama $\det(\mathbf{A}_1)$

Ganti kolom pertama matriks $\mathbf{A}$ dengan matriks sumber tegangan $\mathbf{b} = [12 \ 0 \ 0]^T$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -8 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

Karena kolom pertama banyak mengandung angka nol, kita lakukan ekspansi sepanjang kolom pertama agar perhitungan sangat efisien:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1) &= 12 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 15 \end{vmatrix} - 0 + 0 \\ &= 12(164) \\ &= 1968 \end{aligned}$$

2.5.3 Langkah 3: Menghitung Nilai Arus

$$I_1$$

Berdasarkan Aturan Cramer, nilai arus mesh pertama (I_1) adalah:

$$I_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1968}{684} \approx 2.877 \text{ Ampere} \quad (2.15)$$

Insinyur elektro dapat menggunakan nilai I_1 ini untuk menghitung disipasi daya pada hambatan utama atau merancang sistem proteksi arus lebih (*overcurrent protection*).

2.6 Latihan Soal Mandiri

1. Diberikan matriks parameter impedansi saluran transmisi berikut:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitung nilai $\det(\mathbf{Z})$ menggunakan dua metode berbeda: ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga dan metode reduksi baris (OBE). Verifikasi bahwa kedua metode menghasilkan nilai numerik yang identik!

2. Buktikan secara analitis bahwa jika suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ memiliki dua baris yang saling berkebalikan (segaris/dependen), maka $\det(\mathbf{A}) = 0$. Apa implikasi fisik dari kondisi ini jika matriks tersebut memodelkan sistem distribusi jaringan listrik?
3. Selesaikan SPL untuk arus cabang pada rangkaian penguat operasional (*Op-Amp*) berikut menggunakan

an Aturan Cramer:

$$3V_1 - V_2 - V_3 = 5$$

$$-V_1 + 4V_2 - 2V_3 = 0$$

$$-V_1 - 2V_2 + 5V_3 = 0$$

Tentukan nilai tegangan simpul V_2 dalam satuan Volt!

BAB 3

VEKTOR DI RUANG DIMENSI-2, DIMENSI-3, DAN DIMENSI-N

3.1 Pendahuluan

Dalam dunia rekayasa elektro, fenomena fisis tidak hanya dinyatakan dalam besaran nilai tunggal (skalar), melainkan sering kali memiliki arah spasial atau fase waktu tertentu. Sebagai contoh, kekuatan dan arah medan listrik di sekitar antena pemancar, aliran fluks magnetik pada inti transformator, serta representasi tegangan dan arus bolak-balik (AC) sebagai fasor yang berputar semuanya dimodelkan menggunakan konsep **vektor**.

Pada tingkat lanjut, sinyal-sinyal digital yang diproses oleh mikroprosesor atau data telekomunikasi nirka-bel tidak hanya direpresentasikan dalam dimensi fisik ruang nyata (2D atau 3D), melainkan sebagai vektor dalam ruang dimensi tinggi (n -dimensi). Oleh karena itu, pemahaman matematis yang kuat mengenai operasi vektor, proyeksi ortogonal, perkalian silang, hingga konsep ruang Euclidean merupakan fondasi wajib bagi seorang insinyur elektro. Bab ini akan membedah secara matematis konsep-konsep tersebut beserta visualisasi aplikasinya pada sistem kelistrikan dan elektromagnetik.

3.2 Geometri Vektor di Ruang Dimensi-2 ($\mathbb{R}^2$) dan Dimensi-3 ($\mathbb{R}^3$)

Secara geometris, vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah. Ujung anak panah menyatakan arah vektor, sedangkan panjang ruas garis menyatakan besar atau magnitudo vektor tersebut.

3.2.1 Notasi dan Komponen Vektor

Secara aljabar, sebuah vektor dalam ruang dimensi-2 ($\mathbb{R}^2$) dinyatakan sebagai pasangan bilangan terurut, sedangkan dalam ruang dimensi-3 ($\mathbb{R}^3$) dinyatakan sebagai tripel bilangan terurut:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{dalam } \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{dalam } \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

Nilai-nilai v_1 , v_2 , dan v_3 dinamakan komponen-komponen dari vektor $\mathbf{v}$. Jika titik awal suatu vektor berada pada koordinat asal $(0, 0, 0)$, maka vektor tersebut dinamakan **vektor posisi**.

Dalam analisis rangkaian AC, vektor posisi di $\mathbb{R}^2$ sering dituliskan sebagai bilangan kompleks $\mathbf{V} = V_x + jV_y$ (di mana $j = \sqrt{-1}$ adalah operator imajiner standar Teknik Elektro), yang merepresentasikan amplitudo dan su-

dut fase dari gelombang sinusoidal (fasor).

3.2.2 Operasi Dasar Vektor

Misalkan diberikan dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, serta skalar $k \in \mathbb{R}$:

1. **Penjumlahan Vektor:** Dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad (3.3)$$

2. **Perkalian Skalar:** Mengalikan setiap komponen vektor dengan skalar k :

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \quad (3.4)$$

3.2.3 Norm (Panjang) Vektor

Panjang atau magnitudo dari suatu vektor $\mathbf{v}$, yang dinotasikan dengan $\|\mathbf{v}\|$, dihitung menggunakan teorema Pythagoras:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (3.5)$$

Sebuah vektor yang memiliki panjang sama dengan satu disebut **vektor satuan** (*unit vector*). Kita dapat menormalisasi sembarang vektor bukan nol $\mathbf{v}$ menjadi vektor

satuan $\mathbf{u}$ melalui rumus:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad (3.6)$$

3.3 Perkalian Titik (*Dot Product*) dan Proyeksi

Perkalian titik merupakan operasi perkalian dua buah vektor yang menghasilkan nilai skalar. Operasi ini sangat penting untuk menganalisis sudut antar-vektor dan menentukan kontribusi suatu vektor pada arah vektor lainnya.

3.3.1 Definisi Aljabar dan Geometris Perkalian Titik

Secara aljabar, perkalian titik antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3.7)$$

Secara geometris, hubungan nilai perkalian titik dengan sudut ϑ yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut diberikan oleh:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \vartheta \quad (3.8)$$

Melalui hubungan geometris ini, kita dapat menghitung sudut antar-vektor secara presisi:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (3.9)$$

3.3.2 Ortogonalitas

Dua buah vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dikatakan **ortogonal** (saling tegak lurus) jika dan hanya jika perkalian titik keduanya bernilai nol:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \vartheta = 90^\circ \quad (3.10)$$

Dalam analisis sinyal komunikasi, ortogonalitas digunakan untuk memisahkan kanal informasi yang berbeda agar tidak saling berinterferensi (seperti pada teknologi *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* / OFDM).

3.3.3 Proyeksi Ortogonal

Dalam banyak aplikasi rekayasa, kita perlu menguraikan suatu vektor $\mathbf{u}$ menjadi komponen yang sejajar dengan vektor lain $\mathbf{a}$ dan komponen yang tegak lurus dengannya. Proyeksi ortogonal dari $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{a}$ dinotasikan sebagai $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ dan dirumuskan sebagai:

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} \mathbf{a} \quad (3.11)$$

3.4 Perkalian Silang (*Cross Product*)

Berbeda dengan perkalian titik, perkalian silang hanya didefinisikan secara khusus pada ruang dimensi-3 ($\mathbb{R}^3$) dan menghasilkan sebuah vektor baru yang arahnya tegak lurus terhadap kedua vektor asal.

3.4.1 Definisi Perkalian Silang

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, maka perkalian silang $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ didefinisikan melalui determinan matriks simbolis 3×3 sebagai berikut:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

di mana $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ adalah vektor-vektor satuan standar di $\mathbb{R}^3$. Ekspansi determinan tersebut menghasilkan:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \quad (3.13)$$

Arah dari vektor hasil $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ditentukan secara fisik oleh **Aturan Tangan Kanan**.

3.5 Aplikasi Teknik Elektro: Gaya Lorentz pada Partikel Bermuatan

Salah satu aplikasi fisik paling fundamental dari perkalian silang di bidang Teknik Elektro adalah kalkulasi gaya elektromagnetik yang bekerja pada partikel bermuatan yang bergerak di dalam medan magnet, yang dikenal sebagai **Gaya Lorentz**.

3.5.1 Model Fisika Elektromagnetik

Persamaan vektor Gaya Lorentz didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.14)$$

di mana:

- $\mathbf{F}$ adalah vektor gaya yang dihasilkan (Newton, N).
- q adalah muatan listrik partikel (Coulomb, C).
- $\mathbf{v}$ adalah vektor kecepatan gerak partikel (m/s).
- $\mathbf{B}$ adalah vektor kerapatan fluks medan magnet (Tesla, T).

3.5.2 Contoh Kasus dan Solusi Numerik

Sebuah elektron dengan muatan negatif $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C bergerak di dalam medan magnet homogen dengan vektor kecepatan:

$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times 10^5 \text{ m/s}$$

Medan magnet eksternal yang diterapkan memiliki karakteristik vektor kerapatan fluks:

$$\mathbf{B} = 0.5\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j} + 0.1\mathbf{k} \text{ T}$$

Tentukan vektor gaya Lorentz $\mathbf{F}$ yang dialami oleh elektron tersebut!

Penyelesaian: Langkah pertama adalah menghitung hasil perkalian silang $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 10^5 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0.5 & -0.2 & 0.1 \end{vmatrix}$$

Lakukan ekspansi determinan sepanjang baris pertama:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= 10^5 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -0.2 & 0.1 & 0.5 \end{vmatrix} \\
 &= 10^5 [3(0.1) - (-1)(-0.2)]\mathbf{i} - [2(0.1) - (-1)(0.5)]\mathbf{j} \\
 &\quad + [2(-0.2) - 3(0.5)]\mathbf{k} \\
 &= 10^5 (0.3 - 0.2)\mathbf{i} - (0.2 + 0.5)\mathbf{j} + (-0.4 - 1.5)\mathbf{k} \\
 &= (0.1\mathbf{i} - 0.7\mathbf{j} - 1.9\mathbf{k}) \times 10^5
 \end{aligned}$$

Langkah kedua, kalikan dengan muatan partikel q :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= (-1.6 \times 10^{-19}) \cdot (0.1\mathbf{i} - 0.7\mathbf{j} - 1.9\mathbf{k}) \times 10^5 \\
 &= -1.6 \times 10^{-14}(0.1\mathbf{i} - 0.7\mathbf{j} - 1.9\mathbf{k}) \\
 &= (-0.16\mathbf{i} + 1.12\mathbf{j} + 3.04\mathbf{k}) \times 10^{-14} \text{ Newton}
 \end{aligned}$$

Insinyur elektro menggunakan hasil kalkulasi vektor gaya ini untuk memprediksi lintasan defleksi elektron pada tabung sinar katode (CRT) atau merancang sensor efek Hall.

3.6 Vektor di Ruang Dimensi- n ($\mathbb{R}^n$)

Konsep vektor spasial di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ dapat digeneralisasikan secara aljabar ke dalam ruang berdimensi n ($\mathbb{R}^n$), di mana visualisasi geometris konvensional tidak lagi terse-

dia.

3.6.1 Definisi Ruang Euclidean Dimensi- n

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $\mathbb{R}^n$ (Ruang- n Euclidean) didefinisikan sebagai himpunan semua n -tupel bilangan riil terurut $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.6.2 Metrik Jarak dan Norm di $\mathbb{R}^n$

Untuk sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$:

- **Norm Euclidean:**

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \quad (3.15)$$

- **Jarak Euclidean ($d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$):**

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \quad (3.16)$$

Di bidang Telekomunikasi Digital, nilai $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ merepresentasikan metrik jarak kesalahan (*error distance*) dalam sistem modulasi konstelasi sinyal (seperti QAM-16 atau QAM-64) untuk menguji keandalan transmisi terhadap derau (*noise*).

3.7 Latihan Soal Mandiri

1. Diberikan dua buah impedansi beban kompleks yang dimodelkan sebagai vektor fasor di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{Z}_1 = (4, 3) \quad \text{dan} \quad \mathbf{Z}_2 = (2, -5)$$

- (a) Tentukan panjang (magnitudo) masing-masing impedansi tersebut.
 - (b) Hitung sudut fase ϑ antara kedua impedansi menggunakan perkalian titik.
2. Sebuah kawat penghantar lurus dialiri arus listrik sehingga elektron di dalamnya memiliki kecepatan arah $\mathbf{v} = (3, 0, -4)$ m/s di bawah pengaruh medan magnet bumi $\mathbf{B} = (1, 2, 3)$ Tesla. Jika muatan uji positif $q = 1.0$ C melewati kawat tersebut, tentukan arah gaya pembelokan partikel $\mathbf{F}$ menggunakan operasi perkalian silang!
 3. Dalam Pemrosesan Sinyal Digital (DSP), sebuah paket data diskret direpresentasikan sebagai vektor di ruang dimensi-5 ($\mathbb{R}^5$):

$$\mathbf{s} = (1, -2, 3, 0, 5) \quad \text{dan} \quad \mathbf{r} = (2, 1, 0, -3, 4)$$

Tentukan jarak Euclidean $d(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ antara kedua sinyal

tersebut!

BAB 4

RUANG VEKTOR UMUM

4.1 Pendahuluan

Pada bab-bab sebelumnya, kita telah mempelajari konsep vektor secara geometris di ruang berdimensi rendah ($\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$) serta generalisasinya di ruang n -dimensi ($\mathbb{R}^n$). Namun, dalam bidang Teknik Elektro, kita sering kali menghadapi objek matematika lain yang tidak terlihat seperti vektor spasial biasa, tetapi memiliki perilaku aljabar yang persis sama.

Sebagai contoh, sekumpulan sinyal analog kontinu yang mengalir melalui filter pasif, kumpulan tegangan pada simpul rangkaian dinamis, atau solusi persamaan diferensial linier dari sistem kontrol motor DC semuanya dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan skalar. Objek-objek tersebut secara kolektif membentuk apa yang disebut **Ruang Vektor Umum**. Dengan mengabstraksikan konsep vektor ke dalam ruang yang lebih luas, kita dapat menerapkan konsep aljabar linear—seperti basis, dimensi, kombinasi linear, dan ortogonalitas—untuk menyelesaikan berbagai permasalahan rekayasa sistem kelistrikan yang kompleks secara sistematis.

4.2 Ruang Vektor Real

Definisi ruang vektor umum tidak bergantung pada visualisasi geometris ruas garis berarah, melainkan didasarkan pada sekumpulan aturan formal aksioma aljabar.

4.2.1 Aksioma Ruang Vektor

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, di mana didefinisikan dua operasi: **penjumlahan** (menghasilkan objek $u + v$) dan **perkalian skalar** (menghasilkan objek ku untuk skalar real k). Himpunan V disebut sebagai **Ruang Vektor** dan objek-objek di dalamnya disebut **vektor** jika memenuhi 10 aksioma berikut untuk setiap $u, v, w \in V$ dan skalar real k, m :

A1 Tertutup terhadap Penjumlahan: Jika u dan v berada di V , maka $u + v$ berada di V .

A2 Sifat Komutatif Penjumlahan: $u + v = v + u$.

A3 Sifat Asosiatif Penjumlahan: $u + (v + w) = (u + v) + w$.

A4 Eksistensi Vektor Nol: Terdapat suatu objek $0 \in V$, yang disebut vektor nol, sedemikian rupa sehingga $u + 0 = 0 + u = u$ untuk semua $u \in V$.

A5 Eksistensi Invers Penjumlahan: Untuk setiap $u \in V$, terdapat objek $-u \in V$, yang disebut negatif dari u , sedemikian rupa sehingga $u + (-u) = -u + u = 0$.

A6 Tertutup terhadap Perkalian Skalar: Jika k adalah sebarang skalar real dan u berada di V , maka ku berada di V .

A7 Distributif Skalar 1: $k(u + v) = ku + kv$.

A8 Distributif Skalar 2: $(k + m)u = ku + mu$.

A9 Asosiatif Perkalian Skalar: $k(mu) = (km)u$.

A10 Perkalian dengan Skalar Satuan: $1u = u$.

4.2.2 Contoh Ruang Vektor dalam Tek-nik Elektro

Beberapa contoh ruang vektor non-klasik yang sangat penting dalam rekayasa elektro meliputi:

- **Ruang Fungsi Kontinu** $C(-\infty, \infty)$: Himpunan semua fungsi bernilai real kontinu yang didefinisikan pada interval $(-\infty, \infty)$. Dalam analisis sistem linear, fungsi-fungsi ini merepresentasikan sinyal waktu kontinu $x(t)$ (seperti sinyal tegangan analog kontinu).

- **Ruang Matriks $M_{m \times n}$:** Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$. Ruang ini sering digunakan dalam analisis multivariabel kontrol industri atau komputasi grafis.
- **Ruang Polinomial P_n :** Himpunan semua polinomial dengan derajat maksimal n . Polinomial banyak digunakan untuk mengaproksimasi karakteristik fisis non-linear dari komponen semikonduktor (seperti karakteristik dioda).

4.3 Subruang (*Subspaces*)

Dalam banyak aplikasi, kita sering bekerja di dalam bagian tertentu dari suatu ruang vektor besar yang juga memenuhi syarat sebagai ruang vektor mandiri.

4.3.1 Definisi Subruang

Suatu himpunan bagian W dari ruang vektor V disebut sebagai **subruang** dari V jika W itu sendiri merupakan ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan V .

Untuk membuktikan bahwa W adalah subruang, kita tidak perlu menguji kesepuluh aksioma ruang vektor di atas. Cukup buktikan bahwa W memenuhi teorema penutupan berikut:

1. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ berada di W , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ berada di W (tertutup terhadap penjumlahan).
2. Jika k adalah sebarang skalar real dan $\mathbf{u}$ berada di W , maka $k\mathbf{u}$ berada di W (tertutup terhadap perkalian skalar).

4.3.2 Contoh Subruang

- Himpunan semua matriks diagonal berukuran $n \times n$ merupakan subruang dari ruang matriks $\mathbf{M}_{n \times n}$.
- Dalam analisis kontrol dinamis, himpunan semua solusi dari persamaan diferensial homogen linier:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (4.1)$$

merupakan subruang dari ruang fungsi kontinu $C(-\infty, \infty)$.

4.4 Kombinasi Linear dan Rentang (*Span*)

Konsep ini menjelaskan bagaimana suatu vektor baru dapat dibangun dari sekumpulan vektor dasar yang ada menggunakan operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

4.4.1 Kombinasi Linear

Sebuah vektor $\mathbf{w}$ dikatakan sebagai **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ jika $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r \quad (4.2)$$

di mana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar real konstan yang disebut koefisien kombinasi linear.

4.4.2 Rentang (*Span*)

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V , maka himpunan semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S disebut sebagai ruang yang **direntang** (*spanned*) oleh S , dinotasikan dengan $\text{span}(S)$ atau $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Ruang rentang ini selalu merupakan subruang dari V .

4.5 Kebebasan Linear (*Linear Independence*)

Kebebasan linear berkaitan erat dengan redundansi informasi di dalam suatu himpunan vektor.

4.5.1 Definisi Kebebasan Linear

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan tak kosong dari vektor-vektor di ruang vektor V , maka persamaan vektor:

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

- Memiliki solusi satu-satunya yaitu solusi trivial $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$, maka himpunan S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*).
- Jika terdapat solusi non-trivial (setidaknya ada satu nilai $k_i \neq 0$), maka himpunan S dikatakan **bergantung linear** (*linearly dependent*).

4.6 Basis dan Dimensi

Konsep basis memberikan kerangka koordinat unik untuk mendeskripsikan setiap elemen di dalam ruang vektor.

4.6.1 Definisi Basis

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor di V , maka S disebut sebagai **basis** untuk V jika memenuhi kedua syarat berikut:

1. S bebas linear.

2. S merentang V ($V = \text{span}(S)$).

4.6.2 Dimensi

Sebuah ruang vektor bukan nol V dikatakan memiliki **dimensi berhingga** jika memiliki basis yang mengandung jumlah vektor berhingga. Jumlah vektor di dalam basis tersebut dinamakan **dimensi** dari V , ditulis $\dim(V)$.

Sebagai contoh, dimensi dari ruang polinomial P_n adalah $n+1$, karena basis standarnya $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ terdiri dari $n + 1$ elemen.

4.7 Aplikasi Teknik Elektro: Kombinasi Linear Sinyal Sinusoidal

Dalam analisis sistem pemrosesan sinyal analog dan telekomunikasi, kita sering kali menganalisis superposisi beberapa sinyal dengan frekuensi yang sama namun memiliki sudut fase yang berbeda. Kita dapat membuktikan bahwa kombinasi linear dari sinyal-sinyal ini membentuk suatu subruang vektor yang sangat stabil.

4.7.1 Model Matematika

Misalkan kita bekerja pada ruang fungsi kontinu $C(-\infty, \infty)$. Definisikan sebuah himpunan fungsi $S =$

$\{f_1(t), f_2(t)\}$ dengan:

$$f_1(t) = \cos(\omega t) \text{ dan } f_2(t) = \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

di mana ω menyatakan frekuensi sudut konstan rangkaian (rad/s). Sinyal keluaran $x(t)$ dari suatu rangkaian filter linier dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari basis-basis ini:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

Persamaan di atas dapat direntang menjadi representasi amplitudo tunggal dan pergeseran fase ϑ yang umum dalam representasi listrik arus AC:

$$x(t) = R \cos(\omega t - \vartheta) \quad (4.6)$$

di mana $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ menyatakan amplitudo puncak dan $\vartheta = \arctan(B/A)$ menyatakan sudut fase sinyal.

4.7.2 Contoh Soal dan Pembuktian

Tunjukkan bahwa sinyal tegangan $v(t) = 5 \cos(\omega t - 53.13^\circ)$ merupakan kombinasi linear dari basis $S = \{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$.

Penyelesaian: Gunakan identitas trigonometri selisih

sudut:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Terapkan pada persamaan tegangan $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= 5 \cos(\omega t - 53.13^\circ) \\ &= 5 [\cos(\omega t) \cos(53.13^\circ) + \sin(\omega t) \sin(53.13^\circ)] \end{aligned}$$

Diketahui dari trigonometri dasar:

$$\cos(53.13^\circ) \approx 0.6 \text{ dan } \sin(53.13^\circ) \approx 0.8$$

Substitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned} v(t) &= 5 [0.6 \cos(\omega t) + 0.8 \sin(\omega t)] \\ &= 3 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita telah berhasil menyatakan $v(t)$ sebagai kombinasi linear:

$$v(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \quad (4.7)$$

di mana koefisien kombinasi linearnya adalah $k_1 = 3$ (komponen in-phase) dan $k_2 = 4$ (komponen quadrature). Analisis ini sangat krusial dalam pemrosesan modulasi amplitudo kuadratur (QAM) pada sistem komunikasi

data nirkabel modem 4G/5G.

4.8 Latihan Soal Mandiri

1. Ujilah apakah himpunan W dari semua matriks berukuran 2×2 yang berbentuk diagonal:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan subruang dari ruang matriks $\mathbf{M}_{2 \times 2}$ di bawah operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar!

2. Tentukan apakah himpunan fungsi gelombang sinusoidal berikut bebas linear atau bergantung linear di ruang fungsi $C(-\infty, \infty)$:

$$S = \{\cos^2(t), \sin^2(t), 1\}$$

(Petunjuk: Gunakan identitas trigonometri Pythagoras $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ untuk melihat adanya solusi non-trivial!)

3. Dalam teori sistem kontrol modern, ruang keadaan (*state-space*) sistem diwakili oleh vektor keadaan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$. Jika diperoleh tiga buah vektor respons

sensor sistem kontrol sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

Periksa apakah ketiga vektor sensor tersebut dapat membentuk sebuah basis untuk ruang keadaan $\mathbb{R}^3$!

BAB 5

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

5.1 Pendahuluan

Dalam analisis sistem linier, khususnya pada rekayasa sistem kendali, pemrosesan sinyal digital, dan stabilitas jaringan daya listrik, kita sering dihadapkan pada transformasi matriks yang memetakan suatu vektor keadaan ke vektor keadaan yang baru. Salah satu pertanyaan mendasar dalam transformasi linier ini adalah: "Apakah ada vektor-vektor non-nol yang arahnya tidak berubah ketika ditransformasikan oleh suatu matriks?"

Secara matematis, pencarian arah yang invarian ini membawa kita pada konsep **Nilai Eigen (*Eigenvalues*)** dan **Vektor Eigen (*Eigenvectors*)**. Konsep ini memungkinkan kita mendekomposisi matriks sistem yang kompleks menjadi sekumpulan konstanta skalar (nilai eigen) yang merepresentasikan karakteristik alami sistem, seperti frekuensi resonansi rangkaian RLC atau konstanta waktu redaman transien pada generator listrik. Bab ini akan membahas definisi formal, perhitungan polinomial karakteristik, proses diagonalisasi matriks, hingga aplikasinya dalam memecahkan persamaan diferensial ruang keadaan (*state-space*) rangkaian listrik dinamis.

5.2 Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara geometri, jika kita mengalikan suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ dengan vektor $\mathbf{x}$, umumnya hasil perkalian $\mathbf{Ax}$ akan menghasilkan vektor baru yang memiliki panjang dan arah yang berbeda dari $\mathbf{x}$. Namun, terdapat beberapa vektor khusus yang arahnya tetap sama, dan hanya mengalami penskalaan panjang.

5.2.1 Definisi Formal

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor non-nol $\mathbf{x}$ di dalam $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai **vektor eigen** dari $\mathbf{A}$ jika terdapat skalar λ sedemikian rupa sehingga memenuhi persamaan:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad (5.1)$$

Skalar λ disebut sebagai **nilai eigen** dari $\mathbf{A}$ yang bersesuaian dengan vektor eigen $\mathbf{x}$.

5.2.2 Syarat Eksistensi Solusi

Persamaan $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ dapat kita tulis ulang ke dalam bentuk sistem persamaan linier homogen dengan menggunak-

an matriks identitas $\mathbf{I}$ berukuran $n \times n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{5.2}$$

Agar nilai eigen λ dan vektor eigen non-nol $\mathbf{x}$ eksis, sistem homogen (5.2) harus memiliki solusi non-trivial. Berdasarkan teorema dasar aljabar linear, hal ini terjadi jika dan hanya jika matriks koefisien $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ merupakan matriks singular, yang berarti nilai determinannya sama dengan nol:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0\tag{5.3}$$

Persamaan di atas disebut sebagai **Persamaan Karakteristik** dari matriks $\mathbf{A}$. Ekspansi dari determinan ini menghasilkan polinomial derajat n dalam variabel λ , yang disebut **Polinomial Karakteristik**.

5.3 Menghitung Nilai Eigen dan Ruang Eigen

Langkah sistematis untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks adalah sebagai berikut:

1. Selesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ untuk mendapatkan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.
2. Untuk setiap nilai eigen λ_i yang diperoleh, substitusikan kembali ke persamaan $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. Selesaikan sistem persamaan linear homogen tersebut menggunakan Eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan. Himpunan solusi non-trivial dari sistem ini membentuk subruang yang disebut **Ruang Eigen** (*Eigenspace*) dari **A** yang bersesuaian dengan λ_i .

5.3.1 Contoh Kasus Perhitungan

Carilah nilai eigen dan basis untuk ruang eigen dari matriks berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

1. Persamaan Karakteristik:

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Hitung determinannya:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= (\lambda - 3)(\lambda) - (-2)(1) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

Faktorkan polinomial karakteristik:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Sehingga didapatkan dua nilai eigen: $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$.

2. **Ruang Eigen untuk $\lambda_1 = 1$:** Substitusikan $\lambda = 1$ ke dalam $(\lambda I - A)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Menggunakan OBE, baris pertama dapat direduksi menjadi:

$$x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = -x_2$$

Jika kita memilih parameter $x_2 = t$, maka solusi vektor eigen adalah:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, basis untuk ruang eigen $\lambda_1 = 1$ adalah $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Ruang Eigen untuk $\lambda_2 = 2$:** Substitusikan $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan baris menghasilkan:

$$x_1 + 2x_2 = 0 \implies x_1 = -2x_2$$

Jika kita memilih parameter $x_2 = s$, didapat vektor eigen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, basis untuk ruang eigen $\lambda_2 = 2$ adalah $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.4 Diagonalisasi Matriks

Diagonalisasi adalah proses mengubah suatu matriks persegi $\mathbf{A}$ menjadi matriks diagonal $\mathbf{D}$ melalui transformasi keserupaan (*similarity transformation*). Matriks diagonal sangat disukai dalam komputasi karena mempermudah operasi perpangkatan matriks skala besar ($\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$).

5.4.1 Teorema Diagonalisasi

Sebuah matriks $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$ dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ memiliki n buah vektor eigen yang bebas linear.

Jika kondisi ini terpenuhi, maka:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} \quad (5.4)$$

di mana:

- **P** adalah matriks pendagonal yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen bebas linear dari **A**.
- **D** adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan kolom-kolom pada **P**.

5.5 Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Transien Rangkaian Ruang Keadaan (*State-Space*)

Salah satu penerapan paling vital dari nilai eigen dan diagonalisasi di bidang Teknik Elektro adalah penyelesaian **Persamaan Ruang Keadaan (*State-Space Equation*)** untuk menganalisis respons transien rangkaian dinamis orde tinggi yang mengandung induktor (*L*) dan kapasitor (*C*).

5.5.1 Pemodelan Sistem Dinamis

Respons transien dari rangkaian linier orde-2 dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial linear homogen

sebagai berikut:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (5.5)$$

di mana $\mathbf{x}(t) = [i_L(t) \ v_C(t)]^T$ menyatakan vektor keadaan (arus induktor dan tegangan kapasitor), dan $\mathbf{A}$ adalah matriks parameter fisik rangkaian.

Jika kita melakukan diagonalisasi pada matriks $\mathbf{A}$ menggunakan matriks transisi basis $\mathbf{P}$ (yang berisi vektor eigen $\mathbf{A}$):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t)$$

Maka persamaan sistem dapat diubah menjadi sistem koordinat eigen yang saling bebas (*uncoupled*):

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) \quad (5.6)$$

Solusi dari persamaan ter-dekopel ini sangat mudah dihitung secara individual:

$$z_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} \quad (5.7)$$

di mana λ_i adalah nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ yang merepresentasikan **pole-pole** sistem (menentukan sifat redaman: *overdamped*, *underdamped*, atau *critically damped*).

5.5.2 Contoh Kasus Rangkaian RL-RC Campuran

Diberikan sebuah sistem ruang keadaan rangkaian listrik dengan matriks parameter:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

dengan kondisi awal energi tersimpan pada komponen $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$. Tentukan persamaan solusi lengkap untuk vektor keadaan $\mathbf{x}(t)$!

Penyelesaian:

1. Mencari Nilai Eigen A:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Diperoleh nilai eigen: $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$. Kedua nilai eigen bernilai negatif real, menandakan sistem bersifat stabil dan teredam lebih (*overdamped*).

2. Mencari Vektor Eigen untuk Membentuk Matriks P:

- Untuk $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{p}^1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}^2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Maka matriks pendagonal $\mathbf{P}$ dan inversnya $\mathbf{P}^{-1}$ adalah:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Menghitung Konstanta dari Kondisi Awal:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi koordinat eigen adalah:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4. Mengembalikan ke Vektor Keadaan Asli $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (5.8)\end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan arus $i_L(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$ dan tegangan $v_C(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}$ meluruh secara eksponensial menuju nol seiring waktu berjalan ($t \rightarrow \infty$).

5.6 Latihan Soal Mandiri

1. Tentukan nilai eigen dan basis untuk ruang eigen dari matriks impedansi filter frekuensi berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Periksalah apakah matriks berikut dapat didiagonalisasi atau tidak:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelaskan implikasi geometris dan aljabar jika suatu

matriks transisi sistem kontrol tidak dapat didiagnosis!

3. Sebuah motor DC dikontrol oleh sistem servo dengan persamaan diferensial ruang keadaan yang didefinisikan oleh matriks berikut:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Carilah nilai eigen sistem tersebut dan tentukan apakah sistem kontrol motor bersifat stabil (semua bagian riil dari nilai eigen harus bernilai negatif)!

BAB 6

RUANG HASIL KALI DALAM

6.1 Pendahuluan

Pada pembahasan sebelumnya mengenai vektor di $\mathbb{R}^n$, kita telah mengenal operasi perkalian titik (*dot product*) yang menghasilkan suatu nilai skalar. Perkalian titik tersebut memberikan kita cara untuk mengukur panjang suatu vektor, menentukan sudut antara dua vektor, serta mendefinisikan konsep tegak lurus (ortogonalitas). Namun, dalam rekayasa elektro, konsep-konsep metrik tersebut sering kali perlu diterapkan pada objek yang lebih umum daripada sekadar vektor angka koordinat, seperti fungsi sinyal analog kontinu $x(t)$ atau deret data diskret berukuran dinamis.

Untuk memfasilitasi kebutuhan analisis fisis ini, konsep perkalian titik digeneralisasikan menjadi **Hasil Kali Dalam (*Inner Product*)**. Dengan mendefinisikan ruang hasil kali dalam umum, seorang insinyur elektro dapat mengukur energi total sinyal (menggunakan norm fungsi), memisahkan spektrum frekuensi sinyal komunikasi tanpa interferensi (melalui basis fungsi ortogonal), serta merekonstruksi sinyal analog yang rumit ke dalam representasi harmonik penyusunnya menggunakan analisis Deret Fou-

rier. Bab ini akan membedah definisi formal, sifat-sifat matematis, proses ortogonalisasi Gram-Schmidt, hingga aplikasi praktisnya dalam representasi sinyal dan pendekatan kuadrat terkecil.

6.2 Definisi Ruang Hasil Kali Dalam

Hasil kali dalam adalah suatu fungsi yang memetakan sepasang vektor di dalam ruang vektor V ke bilangan riil (atau kompleks).

6.2.1 Aksioma Hasil Kali Dalam Real

Misalkan V adalah sebuah ruang vektor real. Suatu **hasil kali dalam** pada V adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasangan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V dengan bilangan riil $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, sedemikian rupa sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk setiap vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan semua skalar real k :

I1 Aksioma Simetri: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

I2 Aksioma Aditivitas: $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

I3 Aksioma Homogenitas: $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

I4 Aksioma Positivitas: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, dan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sebuah ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut sebagai **Ruang Hasil Kali Dalam** (*Inner Product Space*).

6.2.2 Contoh Hasil Kali Dalam Fungsi Kontinu

Dalam analisis sinyal analog, ruang vektor yang paling sering digunakan adalah ruang fungsi kontinu $C[a, b]$ pada interval $[a, b]$. Untuk dua fungsi kontinu $f(t)$ dan $g(t)$, hasil kali dalam didefinisikan secara integral sebagai:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad (6.1)$$

Kita dapat membuktikan bahwa definisi integral ini memenuhi keempat aksioma di atas:

- **Simetri:** Karena perkalian skalar fungsi bersifat komutatif $f(t)g(t) = g(t)f(t)$, maka:

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b g(t)f(t) dt \implies \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

- **Positivitas:** Nilai integral kuadrat $\int_a^b f^2(t) dt$ selalu bernilai non-negatif karena luas daerah di bawah kurva kuadrat selalu positif atau nol.

6.3 Sudut, Panjang, dan Ortogonalitas

Di dalam ruang hasil kali dalam umum, kita dapat mendefinisikan panjang dan sudut dengan cara yang analog terhadap konsep geometri Euclidean di $\mathbb{R}^3$.

6.3.1 Norm (Panjang) Vektor

Norm (atau panjang) dari suatu vektor $\mathbf{u}$ di dalam ruang hasil kali dalam V dinotasikan sebagai $\|\mathbf{u}\|$ dan didefinisikan oleh:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (6.2)$$

Dalam bidang elektro, jika $\mathbf{u}$ merepresentasikan sinyal arus atau tegangan, maka nilai kuadrat dari norm, $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, berbanding lurus dengan **energi total** yang disalurkan oleh sinyal tersebut selama interval waktu tertentu.

6.3.2 Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut

Untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di dalam ruang hasil kali dalam V , berlaku hukum **Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (6.3)$$

Ketidaksamaan ini menjamin bahwa rasio $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ selalu

bernilai antara -1 hingga 1 . Oleh karena itu, kita dapat mendefinisikan sudut ϑ di antara kedua vektor melalui hubungan:

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi) \quad (6.4)$$

6.3.3 Ortogonalitas

Dua buah vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di dalam ruang hasil kali dalam V dikatakan **ortogonal** jika hasil kali dalam keduanya bernilai nol:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (6.5)$$

6.4 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt

Bekerja dengan basis yang elemen-elemennya saling tegak lurus dan memiliki panjang satu (ortonormal) sangat mempermudah perhitungan proyeksi dan koordinat sistem.

6.4.1 Himpunan Ortonormal

Himpunan vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di dalam ruang hasil kali dalam V disebut sebagai **himpunan ortogonal** jika semua pasangan vektor yang berbeda di dalamnya saling ortogonal. Jika setiap vektor di dalam himpunan

tersebut juga memiliki norm bernilai satu, maka S disebut sebagai **himpunan ortonormal**:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{jika } i \neq j \\ 1 & \text{jika } i = j \end{cases} \quad (6.6)$$

6.4.2 Proses Ortogonalisasi Gram-Schmidt

Jika kita memiliki basis sebarang $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ untuk ruang hasil kali dalam V , kita dapat mengubahnya menjadi basis ortogonal $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ menggunakan langkah-langkah **Proses Gram-Schmidt** berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (6.7)$$

Untuk memperoleh basis ortonormal, kita cukup menormalisasi setiap vektor hasil proyeksi tersebut: $\mathbf{q}_i =$

$$\frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}.$$

6.5 Aplikasi Teknik Elektro 1: Ortogonalitas Sinyal AC dan Deret Fourier

Analisis spektrum frekuensi pada pemrosesan sinyal didasarkan pada fakta bahwa fungsi sinus dan kosinus dengan frekuensi harmonik yang berbeda bersifat ortogonal satu sama lain.

6.5.1 Pembuktian Ortogonalitas Fungsi Sinusoidal

Mari kita tinjau ruang fungsi kontinu $C[0, T]$ dengan hasil kali dalam integral. Kita ingin menguji ortogonalitas antara dua sinyal AC berfrekuensi berbeda, misalnya $f(t) = \sin(\omega t)$ dan $g(t) = \sin(2\omega t)$, pada satu periode penuh $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Hitung hasil kali dalam kedua fungsi tersebut:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T \sin(\omega t) \sin(2\omega t) dt \quad (6.8)$$

Gunakan identitas trigonometri perkalian sudut:

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

Maka integral di atas menjadi:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(-\omega t) - \cos(3\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\omega t) dt - \int_0^T \cos(3\omega t) dt\end{aligned}$$

Evaluasi masing-masing integral pada batas $[0, T]$ dengan $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(\omega t) dt &= \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sin(2\pi) - 0 = 0 \\ \int_0^T \cos(3\omega t) dt &= \frac{1}{3\omega} \sin(3\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{3\omega} \sin(6\pi) - 0 = 0\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad (6.9)$$

Karena hasil kali dalamnya bernilai nol, kedua sinyal sinusoidal tersebut terbukti **ortogonal**. Sifat ortogonalitas ini dimanfaatkan secara luas dalam sistem transmisi modulasi radio frekuensi (seperti teknik modulasi pembawa sub-saluran OFDM pada teknologi jaringan WiFi dan LTE) untuk mencegah terjadinya tumpang tindih (*cross-talk*) antar-kanal data.

6.6 Aplikasi Teknik Elektro 2: Metode Kuadrat Terkecil (*Least Squares*) untuk Estimasi Sensor

Dalam kalibrasi instrumen sensor elektro (seperti sensor suhu atau arus), data pengukuran yang diambil dari lapangan sering kali terganggu oleh derau acak (*noise*). Kita dapat memodelkan sistem ini menggunakan pendekatan matematika **Kuadrat Terkecil**.

6.6.1 Model Matematika Sistem

Diberikan sistem persamaan linear yang tidak konsisten (karena adanya derau pengukuran):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (6.10)$$

di mana $\mathbf{A}$ adalah matriks parameter desain, dan $\mathbf{b}$ adalah vektor hasil pembacaan sensor fisis di lapangan. Karena sistem ini tidak memiliki solusi eksak, kita mencari solusi pendekatan $\hat{\mathbf{x}}$ sedemikian rupa sehingga meminimalkan norm dari vektor galat (*error vector*) $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|$.

Solusi kuadrat terkecil ini diperoleh dengan menyelesaikan **Persamaan Normal**:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (6.11)$$

6.6.2 Contoh Kasus Kalibrasi Linear

Tiga buah titik koordinat hubungan arus (I , Ampere) dan tegangan (V , Volt) diukur dari sebuah hambatan linier tak dikenal dengan derau pembacaan sebagai berikut: $(1, 2)$, $(2, 5)$, dan $(3, 7)$. Tentukan nilai resistansi pendekatan R menggunakan metode kuadrat terkecil (asumsikan hubungan linier sederhana melewati titik pusat $V = RI$).

Penyelesaian: Persamaan fisis hubungan arus dan tegangan $RI = V$ untuk ketiga titik data menghasilkan sistem linear:

$$R(1) = 2$$

$$R(2) = 5$$

$$R(3) = 7$$

Dinyatakan dalam bentuk matriks $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = [R], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Lakukan perkalian transpose matriks untuk menyusun

Persamaan Normal:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{matrix} & \text{h} & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \\ & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{matrix} & \text{h} & & & \\ & 1 & 2 & 3 & \\ & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{matrix} = 1(2) + 2(5) + 3(7) = 2 + 10 + 21 = 33$$

Substitusikan ke Persamaan Normal:

$$14R = 33 \implies R = \frac{33}{14} \approx 2.357 \, \Omega$$

Nilai resistansi pendekatan kuadrat terkecil ini memberikan deviasi galat kuadrat rata-rata terkecil untuk ketiga hasil pengukuran fisis sensor tersebut.

6.7 Latihan Soal Mandiri

1. Misalkan diberikan dua fungsi $f(t) = t$ dan $g(t) = t^2$ di dalam ruang hasil kali dalam $C[0, 1]$.
 - (a) Hitunglah hasil kali dalam $\langle f, g \rangle$ menggunakan definisi integral standar!
 - (b) Tentukan panjang (norm) dari masing-masing fungsi tersebut!

(c) Hitunglah besar sudut ϑ di antara kedua fungsi tersebut!

2. Gunakan Proses Ortogonalisasi Gram-Schmidt untuk mengubah basis ruang $\mathbb{R}^3$ berikut menjadi basis ortogonal:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

3. Dalam kalibrasi sensor medan magnet, diperoleh empat data pembacaan pengukuran tegangan sensor terhadap medan magnet luar sebagai berikut: $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, dan $(3, 6)$. Carilah persamaan garis pendekatan terbaik $y = mx + c$ yang meminimalkan total kesalahan kuadrat pembacaan tersebut!

BAB 7

DIAGONALISASI ORTOGONAL DAN BENTUK KUADRATIK

7.1 Pendahuluan

Di dalam berbagai disiplin Teknik Elektro, seperti teknik sistem kendali (*control engineering*), pemrosesan sinyal acak, dan analisis kestabilan sistem tenaga listrik, kita sering berhadapan dengan fungsi-fungsi multivariabel nonlinear yang melibatkan suku-suku kuadratik (misalnya fungsi energi sistem, rugi-rugi daya kuadratik, atau fungsi kriteria optimasi). Secara matematis, fungsi-fungsi ini dimodelkan sebagai **Bentuk Kuadratik (*Quadratic Forms*)**.

Untuk menganalisis sifat fisis dari bentuk kuadratik tersebut—seperti menentukan apakah energi sistem selalu bernilai positif untuk setiap keadaan (definisi positif)—kita memerlukan alat aljabar berupa **Diagonalisasi Ortogonal**. Dengan mentransformasikan koordinat menggunakan matriks transisi ortonormal, kita dapat menghilangkan suku-suku silang (*cross-product terms*) yang rumit, sehingga fungsi nonlinear tersebut dapat disederhanakan menjadi penjumlahan suku-suku kuadrat murni dalam sumbu-sumbu utama (*principal axes*). Bab

ini akan membedah landasan matematis dari matriks simetris, proses diagonalisasi ortogonal, klasifikasi definit bentuk kuadratik, dan aplikasinya pada analisis kestabilan sistem dinamis.

7.2 Matriks Simetris dan Diagonalisasi Ortogonal

Sifat diagonalisasi ortogonal sangat bergantung pada karakteristik simetri dari suatu matriks persegi.

7.2.1 Definisi Matriks Simetris

Sebuah matriks persegi **A** berukuran $n \times n$ dikatakan **simetris** jika matriks tersebut sama dengan transposenya sendiri:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (7.1)$$

Elemen-elemen matriks simetris saling bercermin terhadap diagonal utamanya, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j .

7.2.2 Teorema Spektra untuk Matriks Simetris

Matriks simetris real memiliki beberapa sifat spektra (nilai eigen) yang sangat istimewa dan fundamental:

1. Semua nilai eigen dari matriks simetris real adalah **bilangan riil**.
2. Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda dari suatu matriks simetris real selalu **saling ortogonal**.

7.2.3 Diagonalisasi Ortogonal

Sebuah matriks persegi **A** dapat **didiagonalisasi secara ortogonal** jika terdapat matriks ortogonal **P** (di mana $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$) sedemikian rupa sehingga:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D} \quad (7.2)$$

di mana **D** adalah matriks diagonal. Teorema mendasar aljabar linear menyatakan bahwa: "Sebuah matriks persegi **A** dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika **A** adalah matriks simetris real."

7.3 Prosedur Diagonalisasi Ortogonal

Langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matriks simetris **A** secara ortogonal adalah:

1. Hitung semua nilai eigen dari matriks **A** dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

2. Cari basis untuk masing-masing ruang eigen yang bersesuaian.
3. Jika ada ruang eigen yang berdimensi lebih dari satu, terapkan **Proses Gram-Schmidt** pada basis tersebut untuk menghasilkan basis yang saling ortogonal.
4. Normalisasi semua vektor eigen tersebut agar memiliki panjang (norm) satu. Vektor-vektor ortonormal ini akan membentuk kolom-kolom matriks **P**.
5. Matriks diagonal **D** dibentuk oleh nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan urutan kolom vektor eigen pada matriks **P**.

7.4 Bentuk Kuadratik (*Quadratic Forms*)

Sebuah bentuk kuadratik dari n -variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah ekspresi aljabar berbentuk:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (7.3)$$

di mana $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ adalah vektor variabel, dan **A** adalah matriks simetris $n \times n$ yang merepresentasikan koefisien suku kuadrat dan suku silang.

7.4.1 Representasi Matriks

Untuk ruang dimensi-2 ($\mathbb{R}^2$), bentuk kuadrat umumnya dituliskan sebagai:

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \quad (7.4)$$

Bentuk ini dapat dinyatakan dalam perkalian matriks simetris:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

7.4.2 Teorema Sumbu Utama (*Principal Axes Theorem*)

Dengan menggunakan transformasi koordinat $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ di mana $\mathbf{P}$ mendiagonalisasi $\mathbf{A}$ secara ortogonal, bentuk kuadrat dapat disederhanakan menjadi:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} \quad (7.6)$$

Sehingga diperoleh bentuk kuadrat murni tanpa ada suku silang:

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad (7.7)$$

Sumbu-sumbu koordinat baru yang ditentukan oleh kolom-kolom $\mathbf{P}$ disebut sebagai **sumbu utama**.

7.5 Klasifikasi Kodefinitan Bentuk Kuadratik

Sifat nilai dari bentuk kuadratik untuk setiap vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ diklasifikasikan berdasarkan nilai-nilai eigen dari matriks koefisien simetrisnya:

Tabel 7.1: Klasifikasi Kodefinitan Bentuk Kuadratik		
Klasifikasi	Kondisi Nilai $Q(\mathbf{x})$	Sifat Nilai Eigen (λ_i)
Definit Positif	$Q(\mathbf{x}) > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	Semua $\lambda_i > 0$ (Positif)
Definit Negatif	$Q(\mathbf{x}) < 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$	Semua $\lambda_i < 0$ (Negatif)
Semidefinit Positif	$Q(\mathbf{x}) \geq 0$ untuk semua $\mathbf{x}$	Semua $\lambda_i \geq 0$
Semidefinit Negatif	$Q(\mathbf{x}) \leq 0$ untuk semua $\mathbf{x}$	Semua $\lambda_i \leq 0$
Indefinit	Mengambil nilai positif dan negatif	Ada $\lambda_i > 0$ dan $\lambda_j < 0$

7.6 Aplikasi Teknik Elektro: Analisis Kestabilan Sistem Non-Linear Menggunakan Fungsi Lyapunov

Dalam teori kendali modern (*modern control theory*), salah satu metode paling terpercaya untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem dinamis (baik linear

maupun non-linear) adalah **Metode Langsung Lyapunov** (*Lyapunov's Direct Method*).

7.6.1 Formulasi Fungsi Energi Lyapunov

Kestabilan suatu sistem elektro-mekanis (misalnya generator sinkron atau sistem kontrol robotik) dianalisis dengan mendefinisikan suatu fungsi energi skalar fiktif $V(\mathbf{x})$ yang mewakili penyimpangan keadaan sistem dari titik setimbang $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sesuai teorema kestabilan Lyapunov:

- Fungsi Lyapunov $V(\mathbf{x})$ harus bernilai **definit positif** ($V(\mathbf{x}) > 0$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dan $V(\mathbf{0}) = 0$).
- Turunan waktu dari fungsi tersebut, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$, harus bernilai **definit negatif** (menunjukkan energi sistem meluruh seiring waktu).

Jika $V(\mathbf{x})$ berbentuk kuadratik $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, maka kita cukup memastikan bahwa matriks parameter simetris $\mathbf{P}$ didiagonalisasi secara ortogonal dan memiliki **seluruh nilai eigen yang bernilai positif**.

7.6.2 Contoh Analisis Kasus

Sebuah sistem kontrol motor DC memiliki fungsi kandidat energi Lyapunov kuadratik sebagai berikut:

$$V(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

Selidikilah apakah fungsi energi tersebut memenuhi syarat sebagai fungsi Lyapunov yang definit positif dengan mendiagonalisasinya secara ortogonal!

Penyelesaian: Langkah pertama, ubah bentuk kuadratik $V(x_1, x_2)$ menjadi representasi perkalian matriks simetris $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Koefisien suku silang $4x_1x_2$ dibagi rata menjadi elemen $a_{12} = 2$ dan $a_{21} = 2$).

Langkah kedua, hitung nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (-2)(-2) = 0 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = 0 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

Faktorkan persamaan karakteristik:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$$

Karena kedua nilai eigen bernilai positif ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$), maka berdasarkan klasifikasi bentuk kuadratik, fungsi energi kandidat Lyapunov tersebut terbukti **definit positif**.

Langkah ketiga, cari sumbu utama baru dengan menentukan matriks transisi ortogonal **P**:

- Untuk $\lambda_1 = 1$:

$$(1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 2x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{Vektor eigen basis: } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Normalisasi: } \mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Untuk $\lambda_2 = 6$:

$$(6\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\text{Vektor eigen basis: } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Normalisasi: } \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Maka matriks transformasi ortogonal $\mathbf{P}$ adalah:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Melalui transformasi koordinat $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, kita dapat menghilangkan suku silang dan menyatakan fungsi energi sistem ke dalam representasi sumbu utama murni yang terkopel stabil:

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + 6y_2^2 \quad (7.8)$$

Bentuk kuadratik yang telah didekopel ini memudahkan perancangan algoritma kontrol umpan balik (*state-feedback controller*) untuk mengontrol motor listrik secara stabil.

7.7 Latihan Soal Mandiri

1. Diberikan matriks simetris yang merepresentasikan impedansi kopling magnetik pada sistem pemancar

nirkabel sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Didiagonalisasikan matriks $\mathbf{A}$ secara ortogonal dengan mencari matriks ortogonal $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$!

2. Nyatakan bentuk kuadratik berikut ke dalam representasi matriks $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ dan tentukan jenis klasifikasi kodefinitannya:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$

3. Dalam analisis kestabilan jaringan daya listrik (*power grid stability*), fluktuasi sudut rotor generator dimodelkan sebagai bentuk kuadratik energi potensial transien:

$$V(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^2 + 6\delta_1\delta_2 + \delta_2^2$$

Tentukan klasifikasi definit dari bentuk kuadratik energi tersebut. Jika sistem bersifat indefinit, jelaskan potensi bahaya ketidakstabilan fisis yang dapat terjadi pada generator!

BAB 8

TRANSFORMASI LINEAR UMUM

8.1 Pendahuluan

Dalam rekayasa elektro, kita sangat sering memproses suatu sinyal masukan (*input signal*) untuk menghasilkan sinyal keluaran (*output signal*) yang diinginkan. Proses ini dilakukan oleh suatu sistem fisis, baik berupa rangkaian analog (seperti filter pasif RLC atau penguat op-amp) maupun algoritma digital pada mikrokontroler. Jika sistem tersebut memenuhi sifat superposisi—artinya, respons terhadap jumlah dari dua masukan adalah jumlah dari masing-masing respons individu, dan penskalaan masukan menghasilkan penskalaan keluaran yang sebanding—maka sistem tersebut diklasifikasikan sebagai **Sistem Linear**.

Secara matematis, representasi abstrak dari sistem linear ini adalah **Transformasi Linear**. Pada bab-bab awal, kita telah melihat transformasi linear dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ yang direpresentasikan oleh perkalian matriks standar. Namun, dalam ruang vektor umum (seperti ruang fungsi kontinu yang merepresentasikan sinyal analog), transformasi linear mengambil peran yang jauh lebih luas, seperti operator diferensial (turunan) dan operator inte-

gral. Bab ini akan membahas definisi formal transformasi linear umum, konsep Kernel dan Range, representasi matriks transformasi terhadap basis sebarang, serta aplikasinya pada analisis rangkaian elektronika aktif dan sistem *Linear Time-Invariant* (LTI).

8.2 Definisi dan Sifat Dasar

Transformasi linear adalah fungsi yang memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor lainnya dengan tetap mempertahankan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar.

8.2.1 Aksioma Transformasi Linear

Misalkan V dan W adalah ruang vektor real. Suatu fungsi $T : V \rightarrow W$ disebut sebagai **transformasi linear** jika untuk setiap vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan setiap skalar $k \in \mathbb{R}$, berlaku dua aksioma utama berikut:

TL1 Sifat Aditif (Superposisi):

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad (8.1)$$

TL2 Sifat Homogen (Penskalaan):

$$T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \quad (8.2)$$

Jika $V = W$, maka transformasi linear $T : V \rightarrow V$ sering disebut sebagai **operator linear** pada V .

8.2.2 Sifat-Sifat Teorematik

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka berlaku sifat-sifat dasar berikut secara otomatis:

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (Pemetaan vektor nol selalu menghasilkan vektor nol di ruang tujuan).
- $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
- $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + c_rT(\mathbf{v}_r)$ untuk setiap skalar c_i dan vektor $\mathbf{v}_i$. Sifat ini merupakan basis dari prinsip analisis superposisi rangkaian listrik.

8.3 Kernel dan Range

Dalam menganalisis perilaku transformasi linear, kita perlu mengidentifikasi vektor-vektor apa saja yang dipetakan ke nol, serta jangkauan hasil pemetaan tersebut di ruang tujuan.

8.3.1 Kernel (*Inti*)

Misalkan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear. Himpunan semua vektor di V yang dipetakan oleh T ke vektor nol $\mathbf{0}$ di dalam W disebut sebagai **Kernel** (atau *null space*) dari T , dinotasikan dengan $\ker(T)$:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \quad (8.3)$$

Kernel dari T selalu merupakan subruang dari ruang asal V . Dalam analisis sistem kontrol, jika T merepresentasikan persamaan keadaan dinamis, maka $\ker(T)$ merepresentasikan kondisi-kondisi input/keadaan yang tidak memberikan dampak atau respons pada keluaran sistem (*unobservable states* atau *zero-output states*).

8.3.2 Range (*Jangkauan/Citra*)

Himpunan semua vektor di W yang merupakan hasil pemetaan dari setidaknya satu vektor di V oleh T disebut sebagai **Range** (atau *image*) dari T , dinotasikan dengan $R(T)$ atau $\text{im}(T)$:

$$R(T) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ untuk suatu } \mathbf{v} \in V\} \quad (8.4)$$

Range dari T selalu merupakan subruang dari ruang tujuan W .

8.3.3 Teorema Dimensi (Rank-Nullity)

Hubungan dimensi antara domain V , $\ker(T)$, dan $R(T)$ dinyatakan oleh teorema dasar dimensi berikut: Jika V adalah ruang vektor berdimensi berhingga, dan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka:

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V) \quad (8.5)$$

Dimensi dari $R(T)$ disebut sebagai **rank** dari T , sedangkan dimensi dari $\ker(T)$ disebut sebagai **nullity** dari T .

8.4 Representasi Matriks untuk Transformasi Linear Umum

Meskipun transformasi linear bekerja pada ruang fungsi kontinu atau ruang matriks, kita dapat menyatakannya ke dalam bentuk perkalian matriks standar dengan bantuan koordinat basis.

8.4.1 Formulasi Matriks Transformasi

$$[T]_{B',B}$$

Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n dengan basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, dan W adalah ruang vektor berdimensi m dengan basis $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$.

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, kita dapat mengonstruksi matriks koefisien $[T]_{B',B}$ berukuran $m \times n$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap vektor $\mathbf{x} \in V$, berlaku:

$$[T(\mathbf{x})]_{B'} = [T]_{B',B} [\mathbf{x}]_B \quad (8.6)$$

Kolom-kolom dari matriks $[T]_{B',B}$ dibentuk dari vektor koordinat hasil pemetaan masing-masing basis asal B terhadap basis tujuan B' :

$$[T]_{B',B} = \begin{matrix} & \mathbf{h} & & & \mathbf{i} \\ [T]_{B',B} = & [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} & [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} & \dots & [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \end{matrix} \quad (8.7)$$

Jika transformasi berbentuk operator linear $T : V \rightarrow V$ dan kita menggunakan basis yang sama B untuk domain dan kodomain, matriks transformasinya disederhanakan menjadi $[T]_B$.

8.5 Aplikasi Teknik Elektro: Pemodelan Operator Diferensial Rangkaian Op-Amp Aktif

Salah satu aplikasi paling nyata dari transformasi linear umum di bidang teknik elektro adalah representasi fungsi transfer dari rangkaian penguat operasional (*Operational Amplifier* / Op-Amp) yang dikonfigurasi sebagai **integrator** atau **diferensiator**.

8.5.1 Model Fisika Rangkaian

1. **Rangkaian Diferensiator Ideal:** Output tegangan $v_{out}(t)$ sebanding dengan laju perubahan input $v_{in}(t)$ terhadap waktu:

$$v_{out}(t) = -RC \frac{dv_{in}(t)}{dt} \quad (8.8)$$

2. **Rangkaian Integrator Ideal:** Output tegangan $v_{out}(t)$ sebanding dengan akumulasi integral input $v_{in}(t)$ terhadap waktu:

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_{in}(\tau) d\tau \quad (8.9)$$

Mari kita tinjau ruang fungsi polinomial berderajat maksimal 2, $P_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2\}$, yang merepresentasikan sinyal tegangan masukan transien. Kita dapat mendefinisikan operator diferensiasi $D : P_2 \rightarrow P_1$ sebagai:

$$D(p(t)) = \frac{dp(t)}{dt} \quad (8.10)$$

8.5.2 Pembuktian Sifat Linearitas Operator Diferensial

Untuk membuktikan bahwa operator diferensial D merupakan transformasi linear, ambil dua sinyal masukan $p(t), q(t) \in P_2$ dan skalar k :

- **Aditivitas:**

$$D(p(t)+q(t)) = \frac{d}{dt}(p(t)+q(t)) = \frac{dp(t)}{dt} + \frac{dq(t)}{dt} = D(p(t)) + D(q(t))$$

- **Homogenitas:**

$$D(k \cdot p(t)) = \frac{d}{dt}(k \cdot p(t)) = k \frac{dp(t)}{dt} = kD(p(t))$$

Karena kedua aksioma terpenuhi, operator diferensiasi fisik pada rangkaian Op-Amp terbukti merupakan sebuah **transformasi linear**.

8.5.3 Representasi Matriks Operator Diferensial

Carilah representasi matriks dari operator diferensial $D : P_2 \rightarrow P_1$ terhadap basis standar $B = \{1, t, t^2\}$ untuk P_2 , dan basis $B' = \{1, t\}$ untuk P_1 .

Penyelesaian:

1. Tentukan hasil pemetaan D untuk setiap elemen basis asal B :

$$D(1) = \frac{d(1)}{dt} = 0$$

$$D(t) = \frac{d(t)}{dt} = 1$$

$$D(t^2) = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t$$

2. Nyatakan setiap hasil pemetaan tersebut sebagai kombinasi linear dari basis tujuan $B' = \{1, t\}$ untuk mendapatkan vektor koordinatnya:

$$D(1) = 0 = 0(1) + 0(t) \Rightarrow [D(1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t) = 1 = 1(1) + 0(t) \Rightarrow [D(t)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t^2) = 2t = 0(1) + 2(t) \Rightarrow [D(t^2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Susun vektor-vektor koordinat tersebut menjadi kolom-kolom matriks transformasi $[D]_{B',B}$:

$$[D]_{B',B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Matriks representasi ini sangat memudahkan komputasi komputer (misalnya pada simulasi rangkaian SPI-CE) untuk menghitung respons keluaran transien dari rangkaian diferensiator Op-Amp cukup dengan perkalian matriks-vektor sederhana.

8.6 Latihan Soal Mandiri

1. Misalkan $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah fungsi pemetaan dari ruang polinomial ke ruang koordinat dimensi-2 yang didefinisikan oleh:

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

- (a) Buktikan secara matematis bahwa T adalah transformasi linear!
 - (b) Carilah kernel $\ker(T)$ dari transformasi tersebut, dan tentukan dimensinya (nullity)!
2. Sebuah sistem komunikasi nirkabel menggunakan encoder linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan oleh matriks transformasi standar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan dimensi dari jangkauan (range) sinyal encoder tersebut dan jelaskan apakah sistem encoder ini bebas dari redundansi informasi (apakah $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$)!

3. Diberikan operator integral $J : P_1 \rightarrow P_2$ yang merepresentasikan pengolahan sinyal integrator analog pada selang waktu t :

$$J(p(t)) = \int_0^t p(\tau) d\tau$$

Konstruksikan matriks representasi $[J]_{B',B}$ jika basis untuk P_1 adalah $B = \{1, t\}$ dan basis untuk P_2 adalah $B' = \{1, t, t^2\}$!

BAB 9

SISTEM DINAMIS, RANTAI MARKOV, DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

9.1 Pendahuluan

Di dalam dunia nyata, sebagian besar sistem rekayasa elektro bersifat dinamis, artinya kondisi atau keadaan (*state*) dari sistem tersebut terus berubah seiring berlalunya waktu. Sebagai contoh, fluktuasi muatan pada kapasitor, pergeseran status *node* dalam jaringan komputer dari keadaan sibuk ke menganggur, hingga perubahan aliran daya pada grid transmisi akibat variasi beban listrik.

Untuk menganalisis dan memprediksi perilaku jangka panjang (*steady-state*) dari sistem-sistem tersebut, kita memerlukan pemodelan matematis yang tangguh. Aljabar linear menyediakan kerangka kerja teoretis yang sangat kuat melalui integrasi konsep nilai eigen dan vektor eigen untuk menyelesaikan **Sistem Dinamis Diskret**, **Rantai Markov** (proses stokastik), serta **Sistem Persamaan Diferensial Linear Kontinu**. Bab ini akan mengupas tuntas formulasi matematis ketiga pilar dina-

mis tersebut beserta penerapannya yang sangat luas di bidang teknik elektro.

9.2 Sistem Dinamis Linear Diskret

Sistem dinamis diskret adalah sistem yang keadaannya pada langkah waktu berikutnya ditentukan oleh keadaan saat ini melalui hubungan perkalian matriks transisi yang konstan.

9.2.1 Formulasi Matematika

Misalkan $\mathbf{x}_k$ menyatakan vektor keadaan sistem pada langkah waktu (atau iterasi) ke- k . Hubungan transisi linear dari waktu ke waktu dinyatakan oleh persamaan:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

di mana $\mathbf{A}$ adalah matriks transisi sistem berukuran $n \times n$, dan $\mathbf{x}_0$ menyatakan kondisi awal sistem (*initial state*).

Jika kita menelusuri perkembangan keadaan sistem

dari langkah awal, kita akan mendapatkan pola berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

9.2.2 Analisis Lintasan Menggunakan Diagonalisasi

Jika matriks $\mathbf{A}$ dapat didiagonalisasi dengan matriks transisi basis $\mathbf{P}$ yang berisi vektor eigen $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$ yang berisi nilai-nilai eigen $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, maka kita dapat menuliskan kondisi awal $\mathbf{x}_0$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor eigen tersebut:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + \dots + c_n\mathbf{p}_n \tag{9.3}$$

Dengan demikian, perkembangan keadaan pada langkah ke- k dapat dihitung secara langsung tanpa perlu melakukan perkalian matriks berulang kali:

$$\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{p}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{p}_2 + \dots + c_n\lambda_n^k\mathbf{p}_n \tag{9.4}$$

9.2.3 Kestabilan Sistem Diskret

Perilaku jangka panjang dari $\mathbf{x}_k$ saat $k \rightarrow \infty$ sangat bergantung pada magnitudo dari nilai-nilai eigen λ_i :

- Jika $|\lambda_i| < 1$ untuk semua i , maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ saat $k \rightarrow \infty$. Sistem ini dikatakan **stabil** (atau memiliki titik asal sebagai *sink*), di mana semua lintasan keadaan akan meluruh menuju vektor nol.
- Jika terdapat $|\lambda_i| > 1$, maka $\lambda_i^k \rightarrow \infty$. Sistem ini bersifat **tidak stabil** (*source*), di mana keadaan akan tumbuh tanpa batas.
- Jika nilai eigen dominan bernilai $|\lambda_1| = 1$ dan yang lainnya $|\lambda_i| < 1$, sistem akan menuju kondisi mapan yang konstan (*steady-state*).

9.3 Rantai Markov (*Markov Chains*)

Rantai Markov adalah jenis khusus dari sistem dinamis diskret di mana elemen-elemen dari vektor keadaan menyatakan probabilitas dari berbagai status sistem, dan jumlah total probabilitasnya selalu sama dengan satu.

9.3.1 Matriks Probabilitas Transisi

Suatu matriks $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ disebut sebagai **matriks stokastik** atau matriks probabilitas transisi jika:

1. Semua entri bernilai non-negatif: $p_{ij} \geq 0$ untuk semua i, j .
2. Jumlah nilai dari entri di setiap kolom adalah tepat sama dengan 1:

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \quad (\text{untuk setiap } j) \quad (9.5)$$

9.3.2 Vektor Keadaan Probabilitas dan Kondisi Mapan (*Steady-State*)

Vektor keadaan $\mathbf{x}_k$ pada Rantai Markov disebut sebagai **vektor probabilitas** karena jumlah elemennya selalu sama dengan 1. Hubungan rekursifnya adalah:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k \quad (9.6)$$

Untuk rantai Markov reguler (di mana beberapa pangkat dari matriks $\mathbf{P}$ hanya memiliki entri bernilai positif murni), sistem akan selalu konvergen ke sebuah vektor kondisi mapan $\mathbf{q}$ yang unik saat $k \rightarrow \infty$, terlepas dari

apa pun kondisi awal $\mathbf{x}_0$ yang diberikan. Vektor $\mathbf{q}$ ini memenuhi hubungan:

$$\mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{q} \implies (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (9.7)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\mathbf{q}$ adalah vektor eigen dari $\mathbf{P}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$.

9.4 Sistem Persamaan Diferensial Linear Kontinu

Banyak fenomena fisik di bidang teknik elektro, seperti dinamika arus dan tegangan pada rangkaian RLC atau respons transien motor listrik, diatur oleh persamaan diferensial kontinu terhadap waktu (t).

9.4.1 Representasi Ruang Keadaan (*State-Space Representation*)

Sistem persamaan diferensial linear homogen orde-1 dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (9.8)$$

di mana $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} & \frac{dx_2(t)}{dt} & \dots & \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}^T$ adalah turunan dari vektor keadaan.

9.4.2 Solusi Menggunakan Pendekatan Nilai Eigen Kompleks

Jika matriks $\mathbf{A}$ memiliki nilai-nilai eigen λ_i yang berseesuaian dengan vektor eigen $\mathbf{p}_i$, maka solusi umum dari sistem persamaan diferensial tersebut adalah:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{p}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{p}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{p}_n \quad (9.9)$$

Dalam aplikasi praktis, nilai eigen sering kali bernilai kompleks ($\lambda = \sigma \pm j\omega$, di mana $j = \sqrt{-1}$). Kehadiran nilai eigen kompleks ini menandakan adanya perilaku **osilasi** fisis pada sistem:

- Bagian riil (σ) menentukan laju redaman: jika $\sigma < 0$, osilasi akan meluruh stabil menuju nol; jika $\sigma > 0$, osilasi akan tumbuh tidak stabil.
- Bagian imajiner (ω) menentukan frekuensi sudut alami dari osilasi sistem tersebut ($f = \frac{\omega}{2\pi}$).

9.5 Aplikasi Teknik Elektro

9.5.1 Kasus 1: Pemodelan Trafik Paket Data pada Router Jaringan

Sebuah router jaringan komputer di laboratorium Teknik Elektro memiliki dua status jalur transmisi data: **Lancar** (L) dan **Padat** (P). Pengamatan statistik menunjukkan transisi probabilitas sebagai berikut:

- Jika jalur saat ini Lancar, probabilitas langkah berikutnya tetap Lancar adalah 0.8, dan menjadi Padat adalah 0.2.
- Jika jalur saat ini Padat, probabilitas langkah berikutnya menjadi Lancar adalah 0.4, dan tetap Padat adalah 0.6.

Tentukan matriks transisi Rantai Markov, dan hitunglah probabilitas jangka panjang (*steady-state*) dari kondisi trafik tersebut!

Penyelesaian:

1. Susun matriks probabilitas transisi $\mathbf{P}$ berdasarkan status tujuan (baris) dan status asal (kolom):

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Lancar} & \text{Padat} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Lancar} \\ \text{Padat} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Untuk mencari kondisi mapan $\mathbf{q} = \begin{matrix} " \\ q_1 \\ \# \\ q_2 \end{matrix}$, selesaikan sistem homogen $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & " & \# & " & \# & " & \# \\ 1 & 0 & - & 0.8 & 0.4 & q_1 & = & 0 \\ 0 & 1 & " & 0.2 & 0.6 & q_2 & = & 0 \\ & & & 0.2 & -0.4 & q_1 & = & 0 \\ & & & -0.2 & 0.4 & q_2 & = & 0 \end{array}$$

Dari baris pertama, kita dapatkan persamaan:

$$0.2q_1 - 0.4q_2 = 0 \implies q_1 = 2q_2$$

3. Karena $\mathbf{q}$ adalah vektor probabilitas, maka jumlah elemennya harus bernilai 1:

$$q_1 + q_2 = 1 \implies 2q_2 + q_2 = 1 \implies 3q_2 = 1 \implies q_2 = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

Sehingga didapatkan:

$$q_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

Hasil ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang, probabilitas jalur transmisi berada dalam status **Lancar** adalah **66.7%** dan status **Padat** adalah **33.3%**.

9.5.2 Kasus 2: Respons Transien Rang-kaian Resonator RLC

Sebuah rangkaian resonator RLC paralel tanpa sumber memiliki persamaan diferensial ruang keadaan yang diatur oleh hubungan berikut:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

di mana $\mathbf{x}(t) = [v_C(t) \ i_L(t)]^T$ menyatakan tegangan kapasitor dan arus induktor. Selesaikan persamaan gerak transien sistem jika diberi kondisi awal energi $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$!

Penyelesaian:

1. Mencari Nilai Eigen dari Matriks Sistem A:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = 0 \\ &= \lambda(\lambda + 2) - (-1)(5) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

Gunakan rumus kuadratis (ABC) untuk mencari akar-akarnya:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm j2$$

Nilai eigen berupa pasangan konjugat kompleks de-

ngan bagian riil negatif ($\sigma = -1$), menandakan respons sistem bersifat **teredam kurang (*underdamped*)** dengan osilasi yang stabil meluruh.

2. Mencari Vektor Eigen untuk $\lambda_1 = -1 + j2$:

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 + j2 & -1 \\ 5 & 1 + j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris pertama didapatkan:

$$(-1 + j2)p_{11} - p_{12} = 0 \Rightarrow p_{12} = (-1 + j2)p_{11}$$

Pilih $p_{11} = 1$, maka diperoleh vektor eigen pertama:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + j2 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen untuk $\lambda_2 = -1 - j2$ adalah konjugat kompleks dari $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - j2 \end{bmatrix}$$

3. Menyusun Solusi Umum:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(-1+j2)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + j2 \end{bmatrix} + c_2 e^{(-1-j2)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - j2 \end{bmatrix}$$

4. Menghitung Konstanta dari Kondisi Awal

$$\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T :$$

$$\begin{matrix} & \text{"} & \# & & \text{"} & & \# & & \text{"} & & \# \\ & 1 & & & 1 & & & & 1 & & \\ & 0 & = c_1 & & -1 + j2 & + c_2 & & & -1 - j2 & & \end{matrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linear:

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1(-1 + j2) + c_2(-1 - j2) = 0 \implies -(c_1 + c_2) + j2(c_1 - c_2) = 0$$

Substitusikan $c_1 + c_2 = 1$:

$$-1 + j2(c_1 - c_2) = 0 \implies c_1 - c_2 = \frac{1}{j2} = -j0.5$$

Selesaikan nilai c_1 dan c_2 :

$$c_1 = 0.5 - j0.25, \quad c_2 = 0.5 + j0.25$$

5. Mengubah Solusi ke Bentuk Riil Sinusoidal:

Dengan menggunakan rumus Euler $e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$, solusi komponen tegangan kapasitor $v_C(t)$

(baris pertama) adalah:

$$\begin{aligned}
 v_C(t) &= c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2)t} \\
 &= e^{-t} [(0.5 - j0.25)(\cos 2t + j \sin 2t) + (0.5 + j0.25)(\cos 2t - j \sin 2t)] \\
 &= e^{-t} [\cos 2t + 0.5 \sin 2t] \text{ Volt} \quad (9.10)
 \end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa tegangan pada kapasitor akan berosilasi sinusoidal pada frekuensi sudut $\omega = 2 \text{ rad/s}$ sembari meluruh secara eksponensial menuju nol akibat hilangnya energi fisis pada resistor.

9.6 Latihan Soal Mandiri

1. Sebuah sistem transmisi telekomunikasi digital memodelkan status interferensi saluran kabel menggunakan Rantai Markov dengan tiga status: *Baik* (B), *Sedang* (S), dan *Buruk* (K). Matriks probabilitas transisinya adalah:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah vektor probabilitas kondisi mapan (*steady-state*) untuk ketiga status interferensi tersebut!

2. Cari solusi umum dari sistem persamaan diferensial linear berikut yang mewakili respon arus pada dua loop rangkaian induktif:

$$\dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t)$$

3. Diketahui sebuah matriks transisi sistem dinamis diskret pertumbuhan beban daya listrik regional diatur oleh matriks:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{"} & \text{\#} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.3 & 1.0 \end{matrix} \end{matrix}$$

- Hitunglah semua nilai eigen dari matriks transisi $\mathbf{A}$!
- Analisislah kestabilan jangka panjang dari sistem dinamis ini (apakah stabil, tidak stabil, atau menuju kondisi mapan)!

BAB 10

RUANG VEKTOR KOMPLEKS DAN APLIKASINYA DALAM TEKNIK ELEKTRO

10.1 Pendahuluan

Pada bab-bab sebelumnya, pembahasan aljabar linear sebagian besar dibatasi pada ruang vektor riil ($\mathbb{R}^n$) di mana skalar yang digunakan merupakan bilangan riil. Namun, dalam analisis sistem rekayasa elektro, pembatasan ini tidak lagi memadai. Persamaan karakteristik dari suatu matriks sistem fisis sering kali menghasilkan akar-akar yang berupa bilangan kompleks. Selain itu, representasi sinyal bolak-balik (AC - *Alternating Current*) secara alami memanfaatkan representasi amplitudo dan fasa dalam bentuk bilangan kompleks yang dikenal sebagai fasor.

Oleh karena itu, Bab 10 ini akan membahas secara komprehensif konsep **Ruang Vektor Kompleks** ($\mathbb{C}^n$), sifat-sifat aljabar konjugat, definisi hasil kali dalam kompleks (Euclidean), nilai eigen kompleks, serta bagaimana konsep-konsep abstrak ini diimplementasikan untuk memecahkan berbagai persoalan praktis di bidang Teknik Elektro, seperti analisis jaringan impedansi AC dan sis-

tem distribusi daya.

10.2 Tinjauan Ulang Bilangan Kompleks dalam Notasi Teknik Elektro

Untuk menyelaraskan pemahaman, kita perlu mendefinisikan ulang operasi dasar bilangan kompleks menggunakan standar notasi teknik elektro ($j = \sqrt{-1}$).

Jika $z = a + jb$ adalah sebuah bilangan kompleks, maka:

- $Re(z) = a$ adalah bagian riil dari z .
- $Im(z) = b$ adalah bagian imajiner dari z .
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ melambangkan modulus atau nilai mutlak dari z .
- $z^* = a - jb$ melambangkan konjugat kompleks (*complex conjugate*) dari z .
- Hubungan penting: $z z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Bentuk polar dari z dituliskan sebagai:

$$z = |z|(\cos \phi + j \sin \phi) = |z|e^{j\phi} \quad (10.1)$$

di mana $\phi = \arctan(b/a)$ adalah sudut fasa atau argumen dari z .

10.3 Ruang Vektor Kompleks C^n

Ruang vektor kompleks adalah ruang vektor di mana skalar-skalar penyusunnya diperbolehkan berupa bilangan kompleks.

10.3.1 Vektor dalam C^n

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka n -tupel kompleks merupakan barisan n bilangan kompleks $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Himpunan semua n -tupel kompleks ini disebut sebagai **ruang n -dimensi kompleks** dan dilambangkan dengan C^n .

Setiap vektor $\mathbf{v}$ di dalam C^n dapat diuraikan menjadi bagian riil dan bagian imajiner:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + j\mathbf{b} = Re(\mathbf{v}) + jIm(\mathbf{v}) \quad (10.2)$$

di mana $Re(\mathbf{v}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ dan $Im(\mathbf{v}) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$.

Sebagai contoh, jika $\mathbf{v} = (2 + j3, -j5, 4)$, maka:

$$Re(\mathbf{v}) = (2, 0, 4) \quad (10.3)$$

$$Im(\mathbf{v}) = (3, -5, 0) \quad (10.4)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = (2 - j3, j5, 4) \quad (10.5)$$

10.3.2 Sifat-Sifat Aljabar Konjugat Kompleks

Sifat-sifat dasar konjugat kompleks pada vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ dan skalar kompleks k diatur oleh teorema berikut:

1. $\bar{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$
2. $\overline{k\mathbf{u}} = \bar{k}\bar{\mathbf{u}}$
3. $\overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$
4. $\overline{\mathbf{u} - \mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}$

Untuk matriks kompleks $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, konjugat dari matriks $\bar{\mathbf{A}}$ diperoleh dengan mengambil konjugat kompleks dari setiap entri matriks tersebut. Sifatnya meliputi:

1. $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$
2. $\overline{\mathbf{A}^T} = (\bar{\mathbf{A}})^T = \mathbf{A}^H$ (di mana ^{H} melambangkan transpose konjugat atau *Hermitian*)
3. $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}$

10.4 Hasil Kali Dalam Euclidean Kompleks

Untuk mendefinisikan panjang dan sudut di dalam $\mathbb{C}^n$, kita tidak bisa sekadar menggunakan dot product riil biasa.

sa karena hasilnya dapat berupa bilangan imajiner. Oleh karena itu, didefinisikan hasil kali dalam kompleks.

10.4.1 Definisi Hasil Kali Dalam Kom-pleks

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor di dalam C^n , maka hasil kali dalam Euclidean kompleks (atau *complex dot product*) didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n \quad (10.6)$$

Perhatikan bahwa elemen dari vektor kedua ($\mathbf{v}$) dikenai operasi konjugat kompleks.

10.4.2 Norma Euclidean Kompleks

Norma atau panjang dari vektor $\mathbf{v} \in C^n$ didefinisikan sebagai nilai riil non-negatif:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2} \quad (10.7)$$

Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dikatakan saling orthogonal jika hasil kali dalamnya bernilai nol ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$).

10.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Kompleks

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks riil berukuran $n \times n$, persamaan karakteristiknya:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (10.8)$$

dapat menghasilkan nilai eigen kompleks $\lambda = \sigma + j\omega$.

10.5.1 Teorema Nilai Eigen Konjugat

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks riil, dan jika λ adalah nilai eigen kompleks dari $\mathbf{A}$ dengan vektor eigen yang bersesuaian $\mathbf{x}$, maka konjugat kompleks $\bar{\lambda}$ juga merupakan nilai eigen dari $\mathbf{A}$ yang bersesuaian dengan vektor eigen $\bar{\mathbf{x}}$.

Secara matematis:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \implies \overline{\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}} \implies \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}} \quad (10.9)$$

(karena $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ untuk matriks riil).

10.6 Aplikasi Rangkaian Listrik AC dan Analisis Fasor

Di dalam sistem tenaga listrik dan rangkaian elektronika, sinyal sinusoidal searah dituliskan dalam domain waktu sebagai $v(t) = V_m \cos(\omega t + \vartheta)$. Melalui representasi fasor,

tegangan ini dipetakan ke dalam bentuk vektor kompleks satu dimensi:

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\vartheta} = V_m \cos \vartheta + jV_m \sin \vartheta \quad (10.10)$$

Hubungan tegangan, arus ($\mathbf{I}$), dan impedansi ($\mathbf{Z}$) pada sistem multivariabel diatur oleh sistem persamaan linear kompleks:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (10.11)$$

di mana $\mathbf{Z}$ adalah matriks impedansi kompleks berukuran $n \times n$.

10.7 Studi Kasus dan Penyelesaian Detail

10.7.1 Kasus 1: Perhitungan Hasil Kali Dalam dan Norma di $\mathbb{C}^3$

Diketahui dua buah vektor kompleks pada sistem pemrosesan sinyal digital:

$$\mathbf{u} = (2 + j, j, 3 - j) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (1 + j, 2, j4)$$

Hitunglah hasil kali dalam kompleks $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ serta norma $\|\mathbf{u}\|$!

Penyelesaian:

1. Tentukan konjugat dari vektor $\mathbf{v}$:

$$\bar{\mathbf{v}} = (\overline{1+j}, \overline{2}, \overline{j4}) = (1-j, 2, -j4)$$

2. Hitung hasil kali dalam Euclidean kompleks $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (2+j)(1-j) + (j)(2) + (3-j)(-j4) \\ &= (2-j2+j-j^2) + j2 + (-j12+j^24)\end{aligned}$$

Ingat bahwa $j^2 = -1$, sehingga:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (2-j+1) + j2 + (-j12-4) \\ &= (3-j) + j2 - 4 - j12 \\ &= (3-4) + (-1+2-12)j \\ &= -1-j11\end{aligned}$$

3. Hitung norma dari vektor $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{|2+j|^2 + |j|^2 + |3-j|^2} \\ &= \sqrt{(2^2+1^2) + (0^2+1^2) + (3^2+(-1)^2)} \\ &= \sqrt{5+1+10} = \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

10.7.2 Kasus 2: Analisis Jaringan Dis-tribusi Daya Dua Node

Sebuah sistem distribusi daya AC mikro memiliki impedansi saluran yang dinyatakan dalam matriks impedansi kompleks berikut (dalam Ohm):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 + j3 & -j2 \\ -j2 & 2 + j2 \end{bmatrix}$$

.. Jika vektor arus yang mengalir pada node adalah $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 \angle 0^\circ \\ 1 \angle -90^\circ \end{bmatrix}$ Ampere, tentukan vektor jatuh tegangan $\mathbf{V}$ pada masing-masing node!

Penyelesaian: Lakukan perkalian matriks kompleks

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}:$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 4 + j3 & -j2 \\ -j2 & 2 + j2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4 + j3)(2) + (-j2)(-j) \\ (-j2)(2) + (2 + j2)(-j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 + j6 + (j^2 2) \\ -j4 + (2 - j^2 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 + j6 - 2 \\ -j4 - j^2 2 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + j6 \\ 2 - j6 \end{pmatrix} \text{ Volt}\end{aligned}$$

Ubah hasil tegangan ini ke bentuk polar fasor untuk analisis teknik:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 = 6 + j6 &\Rightarrow |\mathbf{V}_1| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \approx 8.49 \text{ V}, \quad \vartheta_1 = 45^\circ \\ \mathbf{V}_2 = 2 - j6 &\Rightarrow |\mathbf{V}_2| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} \approx 6.32 \text{ V}, \quad \vartheta_2 \approx -71.57^\circ\end{aligned}$$

10.8 Latihan Soal Mandiri

1. Cari hasil kali dalam kompleks $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan panjang masing-masing vektor jika diketahui:

$$\mathbf{u} = (1 - j2, 4 + j, -j3) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (j2, 2 - j, 1 + j)$$

- $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Sebuah rangkaian filter meloloskan pita (*bandpass filter*) memiliki sistem persamaan arus loop:

$$(5 + j5)I_1 - j5I_2 = 10$$

$$-j5I_1 + (5 + j2)I_2 = 0$$

125

BAB 11

RUANG HASIL KALI DALAM DAN APLIKASINYA

11.1 Pendahuluan

Pada bab-bab sebelumnya, kita telah mempelajari konsep ruang vektor secara umum serta operasi dot product pada ruang Euclidean R^n . Namun, dalam berbagai analisis teknik, khususnya di bidang Teknik Elektro, kita sering berhadapan dengan ruang fungsi kontinu (seperti sinyal sinusoidal, gelombang elektromagnetik, dan respons sistem) yang tidak dapat dianalisis secara optimal hanya dengan dot product biasa.

Bab ini akan memperluas konsep dot product tersebut menjadi konsep yang lebih umum, yaitu **Ruang Hasil Kali Dalam (Inner Product Space)**. Konsep abstrak ini merupakan fondasi utama bagi analisis Fourier, pemrosesan sinyal digital (DSP), estimasi parameter sistem elektrik menggunakan metode kuadrat terkecil (*least squares*), serta ortogonalisasi sinyal pembawa dalam sistem komunikasi modern.

11.2 Definisi dan Aksioma Hasil Kali Dalam

Misalkan V adalah sebuah ruang vektor riil. Sebuah **Hasil Kali Dalam** (*inner product*) pada V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dengan setiap pasangan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan semua skalar k :

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (Aksioma Simetri)
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \dots = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (Aksioma Aditivitas)
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (Aksioma Homogenitas)
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, dan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Aksioma Positif)

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut sebagai **Ruang Hasil Kali Dalam Riil** (*real inner product space*).

11.2.1 Norma dan Jarak dalam Ruang Hasil Kali Dalam

Berdasarkan definisi hasil kali dalam, kita dapat menurunkan konsep geometri berupa panjang (norma) dari suatu vektor serta jarak antara dua vektor secara umum:

- **Norma** (*length*) dari $\mathbf{v} \in V$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (11.1)$$

- **Jarak** (*distance*) antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ didefinisikan sebagai:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} \quad (11.2)$$

11.2.2 Hasil Kali Dalam Euclidean Ber-bobot

Dalam analisis data hasil pengukuran sensor elektro fisis yang memiliki tingkat derau (*noise*) berbeda, digunakan **Hasil Kali Dalam Euclidean Berbobot**. Jika $w_1, w_2, \dots, w_n$ adalah bilangan riil positif (bobot) , maka untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ didefinisikan:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \dots + w_n u_n v_n \quad (11.3)$$

11.3 Ortogonalitas dan Proses Gram-Schmidt

Dua buah vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di dalam ruang hasil kali dalam V dikatakan saling **ortogonal** jika dan hanya jika:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (11.4)$$

11.3.1 Himpunan Ortonormal

Sebuah himpunan vektor S di dalam V disebut sebagai **himpunan ortogonal** jika semua pasangan vektor berbeda di dalamnya saling ortogonal. Jika setiap vektor di dalam himpunan ortogonal tersebut juga merupakan vektor satuan (memiliki norma = 1), maka S disebut sebagai **himpunan ortonormal**.

11.3.2 Proses Gram-Schmidt

Proses Gram-Schmidt adalah algoritma matematis untuk mengonversi sebarang basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ dari ruang hasil kali dalam menjadi basis ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \quad (11.5)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \quad (11.6)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \quad (11.7)$$

Basis ortonormal diperoleh dengan menormalisasi setiap vektor basis hasil algoritma di atas: $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$.

11.4 Metode Kuadrat Terkecil (Least Squares Approximation)

Dalam analisis regresi linier sistem listrik (misalnya mencari resistansi termal komponen atau pemodelan karakteristik transistor), kita sering kali dihadapkan pada sistem persamaan linear inkonsisten $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Solusi pendekatan terbaik diperoleh dengan meminimalkan norma galat (*error*) kuadrat:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2 \quad (11.8)$$

Solusi kuadrat terkecil (*least-squares solution*) ini diperoleh dengan menyelesaikan **Persamaan Normal**:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (11.9)$$

11.5 Aplikasi: Representasi Deret Fourier

Fungsi periodik (sinyal AC) di dalam Teknik Elektro dapat dipandang sebagai elemen dari ruang fungsi kontinu $C[a, b]$ dengan hasil kali dalam yang didefinisikan sebagai:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad (11.10)$$

Himpunan fungsi trigonometri:

$$\{1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\} \quad (11.11)$$

membentuk himpunan ortogonal pada interval $[-\pi, \pi]$. Melalui proyeksi ortogonal pada subruang fungsi ini, sinyal periodik $f(t)$ dapat didekati menggunakan **Deret Fourier**:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (11.12)$$

di mana koefisien Fourier diperoleh melalui hasil kali dalam:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (11.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (11.14)$$

11.6 Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail

11.6.1 Kasus 1: Ortogonalisasi Sinyal Pembawa Komunikasi (Gram-Schmidt)

Dua buah sinyal dinyatakan dalam bentuk vektor basis non-ortogonal:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)^T$$

Gunakan proses Gram-Schmidt untuk menghasilkan set sinyal pembawa yang saling ortogonal ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$) di bawah hasil kali dalam Euclidean standar!

Penyelesaian:

1. Tentukan vektor pertama:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)^T$$

2. Hitung norma kuadrat dari $\mathbf{v}_1$:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

3. Hitung hasil kali dalam antara $\mathbf{u}_2$ dan $\mathbf{v}_1$:

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = (1)(1) + (2)(1) + (1)(0) = 3$$

4. Hitung komponen ortogonal $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.5 \\ 2 - 1.5 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Lakukan verifikasi ortogonalitas:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = (1)(-0.5) + (1)(0.5) + (0)(1) = 0 \quad (\text{Terbukti Ortogonal})$$

11.6.2 Kasus 2: Estimasi Karakteristik Termal Transistor Daya (Least Squares)

Sebuah pengujian termal transistor daya menghasilkan data hubungan antara arus kolektor (I_C dalam Ampere) dan suhu kerja (T dalam $^{\circ}\text{C}$) sebagai berikut:

Arus I_C (x)	Suhu T (y)
1	30
2	50
3	80

Tentukan model linear terbaik $y = mx + c$ menggunakan pendekatan kuadrat terkecil!

Penyelesaian: Kita dapat menyusun sistem persamaan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Di mana:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Langkah penyelesaian menggunakan persamaan normal

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}:$$

1. Hitung $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Hitung $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 370 \\ 160 \end{bmatrix}$$

3. Selesaikan sistem persamaan linear 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 370 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi/substitusi, kita peroleh:

$$m = 25, \quad c = \frac{10}{3} \approx 3.33$$

Sehingga, model hubungan termal transistor tersebut adalah:

$$T(I_C) = 25I_C + 3.33$$

11.7 Latihan Soal Mandiri

1. Misalkan P_2 memiliki hasil kali dalam evaluasi pada titik-titik sampel $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Tentukan hasil kali dalam $\langle p, q \rangle$ dari polinomial $p(x) = 2 + x^2$ dan $q(x) = 1 - 3x$!
2. Diberikan basis ruang sinyal V sebagai berikut:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (0, 1, 2)^T$$

Gunakan algoritma Gram-Schmidt untuk mengubah basis tersebut menjadi basis yang ortogonal secara mutual!

3. Dalam kalibrasi sensor tegangan analog, diperoleh data pengukuran fisis berikut: Tentukan garis kali-

Tegangan Aktual (x)	0.5	1.0	1.5	2.0
Output Sensor (y)	0.48	1.02	1.45	2.05

brasi terbaik $y = ax$ menggunakan pendekatan kuadrat terkecil linear!

BAB 12

PENDEKATAN FUNGSI DAN DERET FOURIER

12.1 Pendahuluan

Dalam rekayasa elektronika dan telekomunikasi, kita hampir selalu berurusan dengan sinyal. Sinyal-sinyal fisis tersebut, baik berupa gelombang suara, keluaran sensor, maupun transmisi data nirkabel, secara matematis direpresentasikan sebagai fungsi kontinu terhadap waktu, $f(t)$. Untuk menganalisis dan memproses sinyal ini di dalam sistem linear seperti filter frekuensi, kita perlu menguraikannya menjadi kombinasi fungsi-fungsi dasar yang lebih sederhana dan mudah dipahami, yaitu gelombang sinusoidal (sinus dan kosinus).

Bab ini akan membahas bagaimana aljabar linear, khususnya teori ruang hasil kali dalam, menyediakan kerangka kerja untuk melakukan pendekatan fungsi fisis kontinu menggunakan subruang berdimensi terhingga. Puncak dari pembahasan ini adalah formulasi **Deret Fourier**, yang tidak lain merupakan proyeksi ortogonal dari suatu fungsi periodik ke dalam subruang trigonometri.

12.2 Pendekatan Kuadrat Terkecil pada Ruang Fungsi

Misalkan kita memiliki sebuah fungsi kontinu $f(t)$ pada interval $[a, b]$, yang merupakan anggota dari ruang vektor hasil kali dalam $C[a, b]$ dengan hasil kali dalam yang didefinisikan sebagai:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad (12.1)$$

Tujuan kita adalah mencari fungsi pendekatan $g(t)$ terbaik di dalam subruang berdimensi terhingga $W \subset C[a, b]$ sedemikian rupa sehingga meminimalkan galat kuadrat rata-rata (*mean square error*), yang didefinisikan oleh norma kuadrat selisih kedua fungsi:

$$E = \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(t) - g(t)]^2 dt \quad (12.2)$$

Berdasarkan **Teorema Proyeksi Ortogonal**, fungsi pendekatan terbaik $g(t)$ di dalam W adalah proyeksi ortogonal dari f pada W , dituliskan sebagai:

$$g = \text{proj}_W f \quad (12.3)$$

Jika $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ merupakan sebuah basis ortonormal untuk subruang W , maka proyeksi ortogonal tersebut

dapat dievaluasi secara langsung melalui rumus:

$$\text{proj}_W f = \langle f, \phi_0 \rangle \phi_0 + \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 + \cdots + \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad (12.4)$$

12.3 Subruang Trigonometri dan Formulasi Deret Fourier

Misalkan kita membatasi interval domain waktu menjadi $[-\pi, \pi]$. Kita mendefinisikan subruang W_n sebagai ruang fungsi yang direntang oleh himpunan fungsi trigonometri berikut:

$$S = \{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt)\} \quad (12.5)$$

12.3.1 Ortogonalitas Himpunan Trigonometri

Untuk membuktikan bahwa himpunan S membentuk basis ortogonal pada $C[-\pi, \pi]$ di bawah hasil kali dalam integral standar, kita dapat mengevaluasi integral hasil kali

dalam antar-elemennya untuk $m \neq n$:

$$\langle \cos(mt), \cos(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0 \quad (12.6)$$

$$\langle \sin(mt), \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad (12.7)$$

$$\langle \cos(mt), \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad (12.8)$$

Sedangkan untuk perkalian elemen yang sama, kita mendapatkan nilai norma kuadratnya:

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi \quad (12.9)$$

$$\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt = \pi \quad (12.10)$$

$$\langle \sin(nt), \sin(nt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt = \pi \quad (12.11)$$

12.3.2 Koefisien Fourier

Karena basis S bersifat ortogonal (bukan ortonormal), proyeksi ortogonal $g(t) = \text{proj}_{W_n} f$ dari fungsi $f(t)$ pada subruang W_n dituliskan sebagai:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad (12.12)$$

Di mana koefisien-koefisien pembobotnya, yang dikenal sebagai **Koefisien Fourier**, dihitung berdasarkan rumus proyeksi berikut:

$$a_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (12.13)$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(kt) \rangle}{\|\cos(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad (12.14)$$

$$b_k = \frac{\langle f, \sin(kt) \rangle}{\|\sin(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (12.15)$$

Saat $n \rightarrow \infty$, pendekatan $g(t)$ akan konvergen menuju fungsi $f(t)$ di bawah metrik energi. Persamaan representasi limit ini disebut sebagai **Deret Fourier** dari $f(t)$.

12.4 Analisis Galat Kuadrat Rata-Rata (*Mean Square Error*)

Efisiensi dari pendekatan fungsi diukur menggunakan nilai galat kuadrat rata-rata minimum (E_n). Nilai galat ini akan terus berkurang seiring bertambahnya jumlah harmonis (n) yang disertakan dalam deret:

$$E_n = \|f - \text{proj}_W f\|_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \quad (12.16)$$

Berdasarkan **Ketidaksamaan Bessel**, nilai pengurangan di dalam kurung siku tidak akan pernah melebihi norma kuadrat dari fungsi asli $\|f\|_2^2$. Ketika $n \rightarrow \infty$, galat kuadrat rata-rata $E_n \rightarrow 0$, memenuhi persamaan identitas energi Parseval.

12.5 Aplikasi Teknik Elektro: Aproksimasi Sinyal Gelombang Gigi Gergaji (*Sawtooth Wave*)

Dalam pembangkitan sinyal elektronik (misalnya sirkuit defleksi pada monitor CRT lama atau synthesizer musik), gelombang gigi gergaji merupakan salah satu gelombang dasar yang sangat penting. Sinyal gigi gergaji didefinisikan secara matematis pada interval $[-\pi, \pi]$ sebagai:

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Tentukan pendekatan Deret Fourier terbaik hingga harmonis ke- n untuk sinyal ini!

Penyelesaian:

1. **Evaluasi Koefisien a_0 :**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Hal ini terjadi karena $f(t) = t$ adalah fungsi ganjil,

sehingga nilai rata-rata DC-nya bernilai nol.

2. Evaluasi Koefisien a_k (komponen kosinus):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(kt) dt$$

Karena perkalian fungsi ganjil (t) dan fungsi genap ($\cos(kt)$) menghasilkan fungsi ganjil, maka nilai integral pada batas simetris ini bernilai nol:

$$a_k = 0 \quad (\text{untuk semua } k \geq 1)$$

3. Evaluasi Koefisien b_k (komponen sinus):

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt$$

Gunakan teknik pengintegralan parsial ($\int u dv = uv - \int v du$) dengan memisalkan:

$$u = t \implies du = dt$$

$$dv = \sin(kt) dt \implies v = -\frac{1}{k} \cos(kt)$$

Maka integralnya menjadi:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{t}{k} \cos(kt) - \frac{1}{k} \cos(kt) \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{k} \cos(k\pi) - \frac{\pi}{k} \cos(-k\pi) + \frac{1}{k^2} \sin(kt) \right]_{-\pi}^{\pi}
 \end{aligned}$$

Karena $\cos(-k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ dan $\sin(\pm k\pi) = 0$, diperoleh:

$$b_k = \frac{1}{\pi} - \frac{2\pi}{k}(-1)^k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

4. **Menyusun Persamaan Pendekatan Deret Fourier:** Substitusikan koefisien yang diperoleh ke dalam rumus pendekatan:

$$g(t) = 2\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \cdots + n \frac{\sin(nt)}{(12.17)}$$

Melalui visualisasi matematis, semakin tinggi nilai n , representasi sinusoidal tersebut akan semakin mendekati garis lurus sempurna berbentuk gigi gergaji, kecuali pada titik diskontinuitas di $t = \pm\pi$ (efek fenomena Gibbs).

12.6 Latihan Soal Mandiri

1. Sebuah sinyal gelombang kotak simetris (*square wave*) didefinisikan pada interval $[-\pi, \pi]$ sebagai:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Tentukan koefisien Fourier a_0, a_k, b_k serta susunlah model pendekatan fungsi hingga harmonis ke- n !

2. Hitunglah galat kuadrat rata-rata minimum (E_3) dari pendekatan fungsi $f(t) = t$ pada interval $[-\pi, \pi]$ menggunakan deret Fourier orde $n = 3$!
3. Misalkan kita ingin mencari pendekatan kuadrat terkecil untuk fungsi kuadratik $f(t) = t^2$ pada interval $[0, 1]$ menggunakan subruang linear W yang direntang oleh basis polinomial $\{1, t\}$.
 - (a) Hitunglah proyeksi ortogonal dari f pada W menggunakan hasil kali dalam integral standar!
 - (b) Tentukan fungsi linear terbaik $g(t) = mt + c$ yang meminimalkan galat pendekatan tersebut!

BAB 13

DIAGONALISASI ORTOGONAL, BENTUK KUADRATIK, DAN MATRIKS KHUSUS

13.1 Pendahuluan

Dalam analisis sistem rekayasa elektro multivariabel, kita sering kali dihadapkan pada persamaan diferensial terkopel atau representasi energi sistem yang rumit. Untuk mempermudah analisis stabilitas dan optimasi daya, kita memerlukan metode transformasi koordinat yang dapat menghilangkan kopling fisis antar-variabel. Proses eliminasi kopling ini secara matematis diwujudkan melalui dekomposisi matriks, khususnya **Diagonalisasi Ortogonal**.

Bab ini akan membahas secara komprehensif konsep matriks ortogonal, syarat diagonalisasi ortogonal dari matriks simetris riil, pemetaan bentuk kuadratik yang merepresentasikan energi sirkuit elektrik, optimasi kuadratik, serta perluasannya pada domain kompleks melalui matriks Hermitian, Unitary, dan Normal yang menjadi fondasi dalam analisis jaringan listrik AC dan sistem komunikasi nirkabel modern.

13.2 Matriks Ortogonal

Sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ berukuran $n \times n$ dikatakan **ortogonal** jika invers dari matriks tersebut sama dengan transpose-nya:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (13.1)$$

atau, secara ekuivalen:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (13.2)$$

13.2.1 Sifat-Sifat Matriks Ortogonal

Matriks ortogonal memiliki sifat geometris yang sangat penting dalam pemrosesan sinyal karena sifat ini mempertahankan panjang vektor dan sudut antar-vektor (transformasi isometrik):

1. Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks ortogonal, maka vektor-vektor kolom dari $\mathbf{A}$ membentuk himpunan ortonormal pada $\mathbb{R}^n$ di bawah hasil kali dalam Euclidean standar.
2. $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (mempertahankan norma/panjang).
3. $(\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (mempertahankan hasil kali dalam).

4. Determinan dari matriks ortogonal selalu bernilai $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

13.3 Diagonalisasi Ortogonal dan Matriks Sime-tris

Tujuan utama diagonalisasi adalah menemukan matriks pendagonal $\mathbf{P}$ sedemikian rupa sehingga $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ berbentuk matriks diagonal. Jika matriks pendagonal $\mathbf{P}$ tersebut merupakan matriks ortogonal, maka $\mathbf{A}$ dikatakan **terdiagonalisasi secara ortogonal**:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D} \quad (13.3)$$

13.3.1 Teorema Spektra Matriks Sime-tris

Salah satu teorema paling fundamental dalam aljabar linear menyatakan bahwa:

Sebuah matriks persegi $\mathbf{A}$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ adalah matriks simetris riil ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$).

Sifat penting dari matriks simetris riil meliputi:

- Semua nilai eigen dari matriks simetris riil adalah bilangan riil.

- Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda dari matriks simetris riil bersifat saling ortogonal.

13.4 Bentuk Kuadratik

Sebuah **Bentuk Kuadratik** (*quadratic form*) pada $\mathbb{R}^n$ adalah fungsi $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh formulasi:

$$K(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (13.4)$$

di mana $\mathbf{A}$ adalah matriks simetris berukuran $n \times n$.

Dalam teknik elektro, bentuk kuadratik merepresentasikan kuantitas fisik fisis berupa energi, seperti energi elektromagnetik yang tersimpan pada kapasitor/induktor: $E = \frac{1}{2}CV^2$ atau disipasi daya aktif $P = I^2R$.

13.4.1 Teorema Sumbu Utama (*Principal Axes Theorem*)

Setiap bentuk kuadratik $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ dapat ditransformasikan tanpa kopling (tanpa suku perkalian silang seperti x_1x_2) menjadi bentuk kuadratik baru $\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y}$ melalui substitusi variabel $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, di mana $\mathbf{P}$ mendiagonalisasi $\mathbf{A}$ secara

ortogonal:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad (13.5)$$

13.4.2 Klasifikasi Bentuk Kuadratik

Sebuah matriks simetris $\mathbf{A}$ (atau bentuk kuadratik yang bersesuaian) diklasifikasikan berdasarkan tanda nilainya untuk semua $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

- **Definit Positif** (*positive definite*) jika $K(\mathbf{x}) > 0$ (semua nilai eigen $\lambda_i > 0$).
- **Definit Negatif** (*negative definite*) jika $K(\mathbf{x}) < 0$ (semua nilai eigen $\lambda_i < 0$).
- **Semidefinit Positif** (*positive semidefinite*) jika $K(\mathbf{x}) \geq 0$ (semua nilai eigen $\lambda_i \geq 0$).
- **Indefinit** (*indefinite*) jika $K(\mathbf{x})$ dapat bernilai positif maupun negatif (memiliki nilai eigen positif sekaligus negatif).

13.5 Optimasi Menggunakan Bentuk Kuadratik

Dalam teknik elektro, salah satu optimasi yang sering digunakan adalah memaksimalkan atau meminimalkan rasio bentuk kuadratik di bawah kendala $\|\mathbf{x}\| = 1$ (misalnya

maksimalisasi rasio sinyal terhadap derau atau *Signal-to-Noise Ratio*).

Berdasarkan teorema nilai ekstrem, jika $\mathbf{A}$ adalah matriks simetris riil dengan nilai eigen terbesar $\lambda_{\max}$ dan nilai eigen terkecil $\lambda_{\min}$, maka di bawah kendala $\|\mathbf{x}\| = 1$:

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda_{\max} \quad (13.6)$$

$$\min_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda_{\min} \quad (13.7)$$

Nilai maksimum dicapai ketika $\mathbf{x}$ merupakan vektor eigen satuan yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}$, sedangkan nilai minimum dicapai ketika $\mathbf{x}$ merupakan vektor eigen satuan yang bersesuaian dengan $\lambda_{\min}$.

13.6 Matriks Hermitian, Unitary, dan Normal (Domain Kompleks)

Ketika sistem dianalisis menggunakan representasi bilangan kompleks (notasi teknik elektro $j = \sqrt{-1}$), sifat simetris dan ortogonal diperluas menjadi:

13.6.1 Matriks Hermitian

Matriks kompleks **A** berukuran $n \times n$ disebut **Hermitian** jika ia sama dengan transpose konjugatnya ($\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$):

$$\mathbf{A}^H = (\bar{\mathbf{A}})^T = \mathbf{A} \quad (13.8)$$

Sifat utama dari matriks Hermitian adalah seluruh nilai eigen-nya dijamin berupa bilangan riil fisis, meskipun entri-entri matriksnya merupakan bilangan kompleks.

13.6.2 Matriks Unitary

Matriks kompleks **U** berukuran $n \times n$ disebut **Unitary** jika ia mempertahankan hasil kali dalam kompleks, yang memenuhi:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I} \quad (13.9)$$

Matriks unitary merupakan versi kompleks dari matriks ortogonal.

13.6.3 Matriks Normal

Matriks kompleks **A** disebut **Normal** jika ia komutatif dengan transpose konjugatnya:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H \mathbf{A} \quad (13.10)$$

Setiap matriks unitary, Hermitian, maupun skew-Hermitian merupakan kasus khusus dari matriks normal.

13.7 Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail

13.7.1 Kasus 1: Diagonalisasi Ortogonal Matriks Kopling Impedansi Jaringan

Diberikan matriks kopling induktif bersama (*mutual inductance*) simetris dari dua buah loop sirkuit listrik:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \text{"} & \text{"} \\ & 3 & 2 \\ & 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{"} \end{matrix}$$

Tentukan matriks ortogonal $\mathbf{P}$ yang mendiagonalisasi $\mathbf{M}$ secara ortogonal!

Penyelesaian:

1. Tentukan nilai-nilai eigen λ dari persamaan karakteristik $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0$:

$$\det \begin{matrix} & \text{"} & \text{"} \\ \lambda - 3 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{matrix} = (\lambda - 3)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \implies (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

Sehingga didapatkan $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$.

2. Cari vektor eigen untuk $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalisasikan vektor eigen tersebut:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Cari vektor eigen untuk $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalisasikan vektor eigen tersebut:

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Susun matriks pendagonal ortogonal $\mathbf{P}$ dan matriks diagonal $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13.7.2 Kasus 2: Klasifikasi Definit Ting-kat Energi Kapasitor

Sebuah sistem sirkuit multi-kapasitor memiliki persamaan energi kuadratik total:

$$K(v_1, v_2) = 5v_1^2 + 4v_1v_2 + 2v_2^2$$

Nyatakan fungsi energi ini dalam bentuk representasi matriks simetris, dan tentukan klasifikasi kestabilan energinya (apakah definit positif/negatif/indefinit)!

Penyelesaian:

1. Susun matriks simetris **A** berdasarkan koefisien bentuk kuadratik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Perhatikan bahwa koefisien suku perkalian silang $4v_1v_2$ dibagi dua untuk mengisi entri non-diagonal a_{12} dan a_{21}).

2. Hitung nilai-nilai eigen λ dari matriks **A**:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 \implies (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Sehingga didapatkan $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 1$.

3. Berdasarkan hasil analisis, karena kedua nilai eigen bernilai positif ($\lambda_1 = 6 > 0$ dan $\lambda_2 = 1 > 0$), maka sistem sirkuit tersebut diklasifikasikan sebagai **Definit Positif**. Hal ini berarti energi sistem fisis selalu bernilai positif untuk semua kondisi tegangan non-nol.

13.8 Latihan Soal Mandiri

1. Tunjukkan apakah matriks sistem transmisi daya berikut bersifat ortogonal atau tidak:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

2. Diberikan matriks simetris dari sirkuit kopling resonansi tiga tingkat:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai eigen dan basis ortonormal dari ruang eigen yang bersesuaian!

3. Klasifikasikan jenis definit dari matriks energi sirkuit

it jembatan berikut:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Buktikan bahwa nilai eigen dari matriks Hermitian kompleks berikut adalah bilangan riil murni:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1+j \\ 1-j & 3 \end{bmatrix}$$

BAB 14

MATRIKS HERMITIAN, UNITARY, DAN NORMAL

14.1 Pendahuluan

Dalam rekayasa elektro, khususnya pada analisis rangkaian arus bolak-balik (AC), sistem pemrosesan sinyal digital, dan teori medan elektromagnetik, penggunaan bilangan kompleks merupakan suatu kebutuhan fisis dasar. Tegangan dan arus listrik AC dinyatakan sebagai fasor yang memiliki magnitudo dan fase, sementara impedansi komponen reaktif (kapasitor dan induktor) dinyatakan sebagai kuantitas imajiner.

Ketika kita menganalisis sistem multivariabel kompleks (seperti jaringan transmisi daya interkoneksi atau sistem antena MIMO), matriks yang merepresentasikan sirkuit tersebut memiliki elemen-elemen kompleks. Bab ini memperluas konsep matriks simetris, ortogonal, dan diagonalisasi riil ke dalam domain kompleks melalui konsep **Matriks Hermitian**, **Unitary**, dan **Normal**. Pemahaman spektral dari matriks-matriks ini sangat krusial untuk memastikan kestabilan sirkuit serta konservasi energi dalam sistem elektrik.

14.2 Matriks Hermitian dan Spektrum Nilai Eigen

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah sebuah matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan kompleks. **Transpose Konjugat** (atau disebut juga *adjoint*) dari $\mathbf{A}$, yang dilambangkan dengan $\mathbf{A}^H$ (atau $\mathbf{A}^*$), didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T \quad (14.1)$$

di mana $\overline{\mathbf{A}}$ diperoleh dengan mengambil konjugat kompleks dari setiap entri matriks $\mathbf{A}$.

14.2.1 Definisi Matriks Hermitian

Sebuah matriks kompleks persegi $\mathbf{A}$ dikatakan **Hermitian** jika ia sama dengan transpose konjugatnya sendiri:

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A} \quad (14.2)$$

Sifat ini merupakan perluasan langsung dari matriks simetris riil ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) ke dalam ruang kompleks.

14.2.2 Teorema Nilai Eigen Matriks Hermitian

Salah satu sifat fisis paling penting dari matriks Hermitian dalam teknik elektro adalah:

Semua nilai eigen dari matriks Hermitian adalah bilangan riil murni.

Hal ini menjamin bahwa kuantitas fisis seperti daya aktif, energi elektromagnetik tersimpan, dan desibel penguatan daya yang direpresentasikan oleh operator Hermitian selalu bernilai riil dan dapat diukur secara fisis di laboratorium.

14.3 Matriks Skew-Hermitian

Sebuah matriks kompleks persegi **A** dikatakan **Skew-Hermitian** jika memenuhi hubungan:

$$\mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \quad (14.3)$$

Matriks skew-Hermitian merupakan representasi kompleks dari matriks skew-symmetric riil.

14.3.1 Sifat Nilai Eigen Skew-Hermitian

Sesuai dengan referensi teoretis aljabar linear, nilai eigen dari matriks skew-Hermitian memiliki karakteristik spektral khusus:

Setiap nilai eigen dari matriks skew-Hermitian adalah nol atau bilangan imajiner murni.

Dalam analisis sirkuit AC, komponen reaktif murni (induktansi dan kapasitansi tanpa resistansi disipatif) menghasilkan matriks impedansi bertipe skew-Hermitian, yang merepresentasikan transfer daya reaktif murni tanpa disipasi energi aktif.

14.4 Matriks Unitary

Sebuah matriks kompleks persegi **U** dikatakan **Unitary** jika inversnya sama dengan transpose konjugatnya:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H \quad (14.4)$$

atau secara ekuivalen:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I} \quad (14.5)$$

14.4.1 Karakteristik Spektral dan Konservasi Energi

Matriks unitary memiliki sifat-sifat fisis yang krusial untuk pemrosesan sinyal:

1. **Modulus Nilai Eigen:** Setiap nilai eigen λ dari matriks unitary memiliki nilai mutlak (modulus) sama dengan 1, yaitu $|\lambda| = 1$. Secara geometris, nilai eigen ini berada pada lingkaran satuan di bidang kompleks.
2. **Isometri:** Transformasi unitary mempertahankan panjang vektor kompleks (norma). Jika $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$, maka $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$. Sifat ini merepresentasikan hukum kekekalan energi total sinyal sebelum dan sesudah transformasi (misalnya pada FFT - *Fast Fourier Transform*).

14.5 Matriks Normal dan Diagonalisasi Unitary

Sebuah matriks kompleks persegi $\mathbf{A}$ dikatakan **Normal** jika ia komutatif dengan transpose konjugatnya sendiri:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} \quad (14.6)$$

14.5.1 Diagonalisasi Unitary

Sebuah matriks persegi kompleks **A** dikatakan **terdiagonalisasi secara unitary** jika terdapat matriks unitary **U** sedemikian rupa sehingga:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D} \quad (14.7)$$

di mana **D** adalah matriks diagonal yang berisi nilai-nilai eigen dari **A**.

Berdasarkan teorema fundamental aljabar linear kompleks, sebuah matriks kompleks **A** dapat didiagonalisasi secara unitary jika dan hanya jika **A** adalah **matriks normal**. Kelas matriks normal ini mencakup matriks Hermitian, skew-Hermitian, dan unitary sebagai kasus-kasus khususnya.

14.6 Studi Kasus Teknik Elektro dan Solusi Detail

14.6.1 Kasus 1: Spektrum Nilai Eigen Matriks Impedansi Jaringan AC

Sebuah sistem distribusi daya AC dua fasa memiliki matriks impedansi kompleks **Z** yang dinyatakan sebagai ber-

ikut:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 3j \\ -3j & 4 \end{bmatrix}$$

1. Tunjukkan bahwa matriks impedansi $\mathbf{Z}$ adalah matriks Hermitian!
2. Hitunglah nilai-nilai eigen dari $\mathbf{Z}$ untuk membuktikan bahwa spektrum energinya bernilai riil!

Penyelesaian:

1. **Uji Sifat Hermitian:** Lakukan transpose konjugat ($\mathbf{Z}^H$):

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3j \\ 3j & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{Z}^H = \mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} 4 & 3j \\ -3j & 4 \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbf{Z}^H = \mathbf{Z}$, maka matriks impedansi $\mathbf{Z}$ terbukti merupakan **Matriks Hermitian**.

2. **Perhitungan Nilai Eigen:** Selesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Z}) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -3j \\ 3j & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 - (-3j)(3j) = 0 \implies (\lambda - 4)^2 - (9) = 0$$

$$\lambda - 4 = \pm 3 \implies \lambda_1 = 7 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 1$$

Kedua nilai eigen ($\lambda_1 = 7$ dan $\lambda_2 = 1$) adalah bilangan riil murni, konsisten dengan Teorema Spektra Hermitian.

14.6.2 Kasus 2: Matriks Transmisi Sa-luran MIMO Tanpa Rugi-Rugi (Lossless)

Sebuah saluran transmisi nirkabel MIMO 2×2 mentransfer sinyal tanpa kehilangan daya fisis (*lossless*). Matriks transfer saluran dinyatakan oleh matriks unitary $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa matriks transfer saluran $\mathbf{H}$ bersifat unitary!

Penyelesaian: Untuk membuktikan $\mathbf{H}$ unitary, kita harus memverifikasi bahwa $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}$:

1. Hitung transpose konjugat $\mathbf{H}^H$:

$$\mathbf{H}^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

2. Kalikan $\mathbf{H}^H$ dengan $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^H \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1)(1) + (-j)(j) & (1)(j) + (-j)(1) \\ (-j)(1) + (1)(j) & (-j)(j) + (1)(1) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - (-1) & j - j \\ -j + j & 1 - (-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}$, matriks transfer tersebut terbukti merupakan **Matriks Unitary**. Hal ini menjamin daya total sinyal sebelum dan sesudah melewati saluran transmisi MIMO adalah konstan.

14.7 Latihan Soal Mandiri

1. Selidiki apakah matriks sistem kendali kompleks berikut merupakan matriks normal atau tidak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+j & 1 \\ -1 & 1-j \end{bmatrix}$$

2. Hitunglah nilai-nilai eigen dari matriks skew-Hermitian berikut dan tunjukkan bahwa semuanya

berupa bilangan imajiner murni:

$$\mathbf{S} = \begin{matrix} & \text{"} & & \text{"} \\ & 0 & 2j & \# \\ & 2j & 0 & \end{matrix}$$

3. Diberikan matriks Hermitian representasi sirkuit impedansi:

$$\mathbf{X} = \begin{matrix} & \text{"} & & \text{"} \\ & 2 & 1-j & \# \\ & 1+j & 3 & \end{matrix}$$

Tentukan matriks unitary $\mathbf{U}$ yang mendiagonalisasi $\mathbf{X}$ secara unitary!

Bibliografi

- [1] Strang, G. (2022). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
- [2] Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons.
- [3] Lay, D. C. (2003). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Education India.
- [4] Kailath, T., Sayed, A. H., & Hassibi, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice Hall.
- [5] Chen, C. T., & Chen, C. T. (1984). *Linear System Theory and Design* (Vol. 301). New York: Holt, Rinehart and Winston.
- [6] Haykin, S. S. (2008). *Adaptive Filter Theory*. Pearson Education India.
- [7] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2006). *Numerical Mathematics* (Vol. 37). Springer Science & Business Media.
- [8] Marchuk, G. I., & Brown, A. A. (1982). *Methods of Numerical Mathematics* (Vol. 2). New York: Springer-Verlag.

- [9] Björck, Å. (2015). *Numerical Methods in Matrix Computations* (Vol. 59). Cham: Springer.
- [10] Valentine, D. T., & Hahn, B. H. (2022). *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*. Academic Press.
- [11] Imrona, M. (2013). *Aljabar Linear Dasar* (Edisi Kedua).

GLOSARIUM

Adjoint (Transpose Konjugat)

Operasi matriks yang diperoleh dengan cara mentranspose matriks lalu mengambil konjugat kompleks dari setiap entrinya. Dilambangkan dengan $\mathbf{A}^H$ atau $\mathbf{A}^*$.

Antena MIMO (Multiple-Input Multiple-Output)

Sistem komunikasi nirkabel yang menggunakan banyak antena pemancar dan penerima untuk meningkatkan kapasitas transmisi; pemodelan salurannya memanfaatkan matriks kompleks dan transformasi unitary.

Diagonalisasi Unitary

Proses mengubah matriks persegi $\mathbf{A}$ menjadi matriks diagonal $\mathbf{D}$ melalui matriks unitary $\mathbf{U}$, sedemikian rupa sehingga $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D}$.

Fasor

Vektor kompleks yang merepresentasikan magnitudo dan fase dari sinyal gelombang sinus (seperti arus atau tegangan AC) dalam domain frekuensi.

FFT (Fast Fourier Transform)

Algoritma komputasi cepat untuk menghitung Transformasi Fourier Diskret (DFT); secara matematis menggunakan transformasi matriks unitary untuk menjaga energi sinyal.

Impedansi Kompleks (Z)

Oposisi total terhadap arus listrik AC dalam sirkuit, terdiri dari komponen riil (resistansi) dan komponen imajiner (reaktansi kapasitif/induktif).

Isometri

Sifat transformasi linier yang mempertahankan panjang (norma) vektor atau energi total sinyal, seperti yang dimiliki oleh matriks unitary.

Konjugat Kompleks

Operasi matematika yang mengubah tanda bagian imajiner dari suatu bilangan kompleks; jika $z = a+bi$, maka konjugatnya adalah $z^* = a - bi$.

Matriks Hermitian

Matriks persegi kompleks yang sama dengan transpose konjugatnya sendiri

$(\mathbf{A}^H = \mathbf{A})$. Memiliki nilai eigen yang selalu berupa bilangan riil murni.

Matriks Normal

Matriks persegi kompleks yang komutatif terhadap transpose konjugatnya $(\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A})$. Merupakan syarat mutlak matriks dapat didiagonalisasi secara unitary.

Matriks Skew-Hermitian

Matriks persegi kompleks yang memenuhi hubungan $\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$. Nilai eigen dari matriks ini selalu bernilai nol atau imajiner murni.

Matriks Unitary

Matriks persegi kompleks yang inversnya sama dengan transpose konjugatnya $(\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H)$. Memiliki nilai eigen dengan modulus sama dengan 1 $(|\lambda| = 1)$.

Nilai Eigen (λ) Skalar yang menunjukkan faktor skala perubahan panjang vektor eigen saat dikenai transformasi matriks linier $(\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x})$.

Norma Vektor ($\| \mathbf{x} \|$)

Ukuran panjang atau besaran dari sebuah vektor dalam ruang vektor kompleks atau riil, sering kali merepresentasikan magnitudo sinyal atau amplitudo tegangan.

Ruang Vektor Kompleks ($\mathbb{C}^n$)

Himpunan vektor berdimensi n di mana skalar dan elemen-elemen entri matriksnya berasal dari himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

Teorema Spektral

Teorema yang menyatakan bahwa matriks-matriks tertentu (seperti Hermitian dan Normal) dapat didiagonalisasi menggunakan basis ortonormal dari vektor-vektor eigennya.

Vektor Eigen ($\mathbf{x}$)

Vektor non-nol yang arahnya tidak berubah (hanya berskala) ketika dikalikan dengan suatu matriks persegi.

BIODATA PENULIS

Profil Singkat

Ir. Aryo De Wibowo Muhammad Sidik, S.T., M.T., SMIEEE.

Merupakan seorang profesional dan akademisi yang dinamis dengan pengalaman lebih dari 15 tahun yang mencakup bidang pendidikan tinggi, industri, dan perencanaan strategis. Saat ini menjabat sebagai **Head of Strategic Planning and Business Development (SPBD) Unit** sekaligus **Dosen Teknik Elektro** di Universitas Nusa Putra, Jawa Barat.

Keahlian akademisnya berfokus pada bidang **Control Electrical Engineering** (*Control Systems, Optimization, Predictive Models, Robust & Adaptive Control*) serta **Intelligent Systems** (*Artificial Intelligence, Machine Learning, Deep Learning, Neural Networks, Fuzzy Logic, dan Expert Systems*).

Riwayat Pendidikan

- **Pendidikan Profesi Insinyur (PPI)** – Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya (2023)

- **Magister Teknik (M.T.) - Teknik Elektro (Sistem Kendali & Cerdas)** – Institut Teknologi Bandung / ITB (2012–2014)
- **Sarjana Teknik (S.T.) - Teknik Elektro** – Institut Teknologi Telkom / IT Telkom (2007–2011)

Pengalaman Kerja & Akademis

- **Head of Strategic Planning and Business Development (SPBD) Unit** – Universitas Nusa Putra (2023–Sekarang)
- **Dosen Teknik Elektro** – Universitas Nusa Putra (2018–Sekarang)
- **Ketua Program Studi Teknik Elektro** – Universitas Nusa Putra (2019–2023)
- **Digital Plan & Act. Analyst** – PT. HM Sampoerna Tbk. (2019–2021)
- **RE Executive** – PT. HM Sampoerna Tbk. (2015–2019)
- **Senior System Engineer** – Madeira Research Pte Ltd (2015)

- **Project RAPID Hardware Researcher** – IT Telekom (2011)

Pengalaman Organisasi Professional

- **Board Member** – IEEE Indonesia Section (Student Branch & Member Activities Committee) (2023–2025)
- **Board Member** – IEEE Indonesia Section (Conference Coordination & Research Publication Activities Committee) (2023–2024)
- **Organizer** – International Symposium on Consumer Technology (ISCT) IEEE Conference (2024)

Publikasi & Karya Ilmiah Terpilih

Penulis aktif mempublikasikan berbagai artikel ilmiah pada jurnal berreputasi internasional maupun nasional (Scopus dan SINTA). Beberapa publikasi pilihan antara lain:

1. *Machine Learning Method for Microplastic Identification Using a Combination of Machine Learning and Raman Spectroscopy* (Scopus Q3, 2024)

2. *Review of Transfer Learning Techniques for MRI-based Brain Tumor Image Segmentation* (Scopus Q3, 2024)
3. *Bibliometric Analysis of Education and Tourism: Scholarly Trends and Insights* (Scopus Q3, 2024)
4. *Social Consumer Relation Management Using Social Media as a Marketing Scheme in University* (SINTA 1 / Scopus Q3, 2023/2024)
5. *A Novel Interval Type-2 Fuzzy Logic Controller for Shunt Active Power Filters in Power Quality Enhancement* (Jurnal SINTA 5, 2024)
6. *Enhancing Hybrid Wind-Solar-Battery System Efficiency through Artificial Neural Network-Based Energy Management and Voltage Regulation in Micro Grids* (Jurnal SINTA 5, 2024)

Kontak Penulis

Email: aryo.dewibowo@nusaputra.ac.id

Institusi: Universitas Nusa Putra, Sukabumi, Jawa Barat, Indonesia

SINOPSIS BUKU

ALJABAR LINEAR UNTUK TEKNIK ELEKTRO

*Menguasai Matriks, Ruang Vektor, dan Sistem Kompleks
dalam Rekayasa Modern*

Aljabar Linear bukan sekadar kumpulan rumus dan prosedur kalkulasi matriks—ia adalah **bahasa universal** yang menggerakkan perkembangan teknologi rekayasa elektro modern. Mulai dari analisis jaringan listrik skala besar, perancangan sistem kendali otomatis, pemrosesan sinyal digital, hingga arsitektur komunikasi nirkabel masa depan, seluruhnya berakar pada pemahaman aljabar linear yang kokoh.

Buku ajar ini hadir secara khusus untuk menjembatani jurang antara teori matematis abstrak dengan aplikasi praktis dalam bidang Teknik Elektro. Dengan pendekatan visual, intuitif, dan aplikatif, buku ini menuntun mahasiswa Program Sarjana (S1) menelusuri konsep-konsep fundamental hingga topik tingkat lanjut, meliputi:

- **Sistem Persamaan Linear & Eliminasi Gaussi-an:** Fondasi analisis simpul dan jerat pada sirkuit listrik kompleks.

- **Ruang Vektor & Transformasi Linear:** Basis teoretis dalam analisis sinyal dan pemodelan sistem dinamis.
- **Nilai Eigen & Vektor Eigen:** Kunci utama dalam menganalisis kestabilan sistem kendali dan respons frekuensi.
- **Ruang Produk Dalam Kompleks:** Mengupas tuntas **Matriks Hermitian, Unitary, dan Normal** yang menjadi pilar dalam analisis arus AC, teori medan elektromagnetik, serta sistem komunikasi *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO).

Dilengkapi dengan **contoh soal berbasis rekayasa, penyelesaian langkah-demi-langkah yang sistematis**, serta **latihan soal mandiri**, buku ini diproyeksikan menjadi panduan wajib bagi mahasiswa, dosen, maupun praktisi yang ingin menguasai aljabar linear tidak hanya di atas kertas, tetapi juga dalam pemecahan masalah teknik elektro di dunia nyata.