

BAGIAN- BAGIAN MATEMATIKA DASAR



Yenny Anggreini Sarumaha, Hetty Elfina, Siti Ulfa Nabila,
Farida Daniel, Syahrani Sirait, Nurul Ainun Fajriah,
Vini Rizqi, Rahma Faelosofi, Marzuki Ahmad, Hasniati,
Mohammad Ardani Samad, Kirtyana Nindita

BAGIAN- BAGIAN MATEMATIKA DASAR

Yenny Anggreini Sarumaha

Hetty Elfina

Siti Ulfa Nabila

Farida Daniel

Syahrani Sirait

Nurul Ainun Fajriah

Vini Rizqi

Rahma Faelosofi

Marzuki Ahmad

Hasniati

Mohammad Ardani Samad

Kirtyana Nindita



GET PRESS INDONESIA

BAGIAN- BAGIAN MATEMATIKA DASAR

Penulis :

Yenny Anggreini Sarumaha
Hetty Elfina
Siti Ulfa Nabila
Farida Daniel
Syahriani Sirait
Nurul Ainun Fajriah
Vini Rizqi
Rahma Faelosofi
Marzuki Ahmad
Hasniati
Mohammad Ardani Samad
Kirtyana Nindita

ISBN : 978-623-125-167-1

Editor : Ari Yanto M.Pd

Penyunting : Tri Putri Wahyuni., S.Pd

Desain Sampul Dan Tata Letak : Atyka Trianisa, S.Pd

Penerbit : Get Press Indonesia Anggota Ikapi No. 033/Sba/2022

Redaksi :

Jln. Palarik Air Pacah No 26 Kel. Air Pacah Kec. Koto Tangah Kota
Padang Sumatera Barat

Website : www.getpress.co.id Email : Adm.Getpress@Gmail.Com

Cetakan Pertama, Mei 2024

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang Dilarang Memperbanyak
Karya Tulis Ini Dalam Bentuk Dan Dengan Cara Apapun Tanpa Izin
Tertulis Dari Penerbit.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur atas kehadiran allah swt dalam segala kesempatan. Sholawat beriring salam dan doa kita sampaikan kepada nabi muhammad saw. Alhamdulillah atas rahmat dan karunia-nya penulis telah menyelesaikan buku bagian- bagian matematika dasar ini.

Buku ini membahas eksponen, logaritma, fungsi kuadrat, persamaan kuadrat, persamaan linear, pertidaksamaan linear, program linear, relasi dan fungsi, suku banyak, matriks, barisan danderet, aplikasi barisan dan deret.

Proses penulisan buku ini berhasil diselesaikan atas kerjasama tim penulis. Demi kualitas yang lebih baik dan kepuasan para pembaca, saran dan masukan yang membangun dari pembacasangat kami harapkan.

Penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dalam penyelesaian buku ini. Terutama pihak yang telah membantu terbitnya buku ini dan telah mempercayakan mendorong, dan menginisiasi terbitnya buku ini. Semoga buku inidapat bermanfaat bagi masyarakat indonesia.

Padang, Mei 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	vi
BAB 1 EKSPONEN	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Ekspresi pada Eksponen	1
1.3 Urutan Operasi Bilangan	2
1.4 Variabel dan Eksponen	3
1.5 Perkalian dengan Eksponen	5
1.6 Pembagian dengan Eksponen	6
1.7 Eksponen Tertentu	10
1.7.1 Nol dan Satu sebagai Eksponen	10
1.7.2 Eksponen Negatif dan Hasil Bagi	11
1.8 Notasi Sainifik pada Eksponen	11
1.9 Operasi pada Monomial	12
1.9.1 Perkalian dan Pembagian Monomial	12
1.9.2 Perkalian dan Pembagian Bilangan dalam Notasi Sainifik	13
1.9.3 Penjumlahan dan Pengurangan Monomial	14
1.10 Kesalahan Umum yang Melibatkan Eksponen	14
1.11 Bilangan Rasional sebagai Eksponen	15
DAFTAR PUSTAKA	18
BAB 2 LOGARITMA	19
2.1 Pendahuluan	19
2.2 Grafik Fungsi Logaritma	19
2.3 Sifat – Sifat Logaritma	21
2.4 Persamaan Logaritma	24
2.5 Model Matematika Berbentuk Logaritma	28
DAFTAR PUSTAKA	30
BAB 3 FUNGSI KUADRAT	31
3.1 Pendahuluan	31
3.2 Grafik Fungsi Kuadrat	31
Latihan Soal	43
DAFTAR PUSTAKA	45
BAB 4 PERSAMAAN KUADRAT	47
4.1 Bentuk Umum Persamaan Kuadrat	47

4.2 Penyelesaian Persamaan Kuadrat	47
4.2.1 Pemfaktoran	47
4.2.2 Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.....	49
4.2.3 Menggunakan Rumus Kuadrat	51
4.3 Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat.....	53
4.4 Jumlah Dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat.....	54
Latihan soal	57
DAFTAR PUSTAKA	58
BAB 5 PERSAMAAN LINEAR.....	59
5.1 Pendahuluan	59
5.2 Sifat Persamaan Linear	59
5.3 Jenis-jenis Persamaan Linear	60
Latihan Soal	67
DAFTAR PUSTAKA.....	68
BAB 6 PERTIDAKSAMAAN LINEAR	69
6.1 Pendahuluan	69
6.1.1 Tertutup pada bilangan positif	69
6.1.2 Trikotomi	69
6.1.3 Akar	69
6.2 Pertidaksamaan Linear Satu.....	69
6.3 Penyelesaian Pertidaksamaan Linear dengan Sifat Operasi Bilangan.....	70
6.3.1 Sifat Penjumlahan dan Pengurangan	70
6.3.2 Sifat Perkalian	71
6.3.3 Kombinasi Sifat.....	72
6.3.4 Pertidaksamaan Majemuk dengan Tiga Bagian	73
6.4 Penyelesaian Masalah Pertidaksamaan Linear	74
6.4.1 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk yang Mengandung Kata ‘Dan’	74
6.4.2 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk yang Mengandung Kata ‘Atau’	75
6.4.3 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk Khusus	76
DAFTAR PUSTAKA.....	78
BAB 7 PROGRAM LINEAR	79
7.1 Pendahuluan	79
7.2 Sistem Pertidaksamaan Linear	79
7.2.1 Himpunan penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Satu Variabel.....	80

7.2.2 Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel.....	81
7.3 Nilai Optimum Sistem Pertidaksamaan Linear	83
7.3.1 Metode Uji Titik Pojok	83
7.3.2 Metode Garis Selidik.....	88
DAFTAR PUSTAKA.....	91
BAB 8 RELASI DAN FUNGSI.....	93
8.1 Relasi.....	93
8.2 Fungsi	96
8.2.1 Pengertian Fungsi.....	96
8.2.2 Sifat-sifat Fungsi.....	98
8.2.3 Jenis-jenis Fungsi Matematika.....	100
DAFTAR PUSTAKA.....	109
BAB 9 SUKU BANYAK.....	111
9.1 Pendahuluan	111
9.2 Operasi pada Suku Banyak.....	111
9.2.1 Penjumlahan.....	112
9.2.2 Pengurangan.....	112
9.2.3 Perkalian	113
9.3 Kesamaan Suku Banyak.....	114
9.4 Pembagian Suku Banyak.....	114
9.4.1 Metode Pembagian Bersusun.....	114
9.4.2 Metode Horner.....	117
9.5 Teorema Sisa.....	127
9.5.1 Pembagi berbentuk $(x-k)$	128
9.5.2 Pembagi berbentuk $(ax+b)$	129
DAFTAR PUSTAKA.....	131
BAB 10 MATRIKS	133
10.1 Pendahuluan	133
10.2 Definisi Matriks.....	133
10.3 Bentuk Matriks.....	135
10.3.1 Matriks Diagonal	136
10.3.2 Matrik-matriks segitiga	136
10.3.3 Matriks Identitas	136
10.3.4 Matriks Nol	137
10.4 Operasi Matriks.....	138
10.4.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks.....	138
10.4.2 Perkalian Skalar	139

10.4.3 Perkalian Matriks	140
10.4.4 Transpose Matriks	141
10.4.5 Trace dari Suatu Matriks Bujur Sangkar	142
10.4.6 Aturan Aritmetika Matriks	142
10.5 Invers Matriks.....	143
10.5.1 Definisi Invers Matriks.....	143
10.5.2 Peringkat Suatu Matriks	145
10.6 Determinan Matriks	145
10.6.1 Perluasan Kofaktor (Ekspansi Laplace)	146
DAFTAR PUSTAKA.....	151
BAB 11 BARISAN DAN DERET	153
11.1 Barisan, Pola, Deret Bilangan Dan Notasi Sigma.....	154
11.2 Barisan Dan Deret Aritmatika	161
11.3 Barisan Dan Deret Geometri	169
DAFTAR PUSTAKA.....	179
BAB 12 APLIKASI BARISAN DAN DERET	181
12.1 Pendahuluan.....	181
12.2 Aplikasi Barisan dan Deret Aritmatika	181
12.2.1 Contoh Menghitung Kapasitas Tempat Duduk.....	181
12.2.2 Contoh Terkait Kenaikan Gaji dengan Nominal Konstan	183
12.2.3 Contoh Terkait Peningkatan Aktivitas Fisik	184
12.2.4 Contoh Terkait Penurunan Nominal Hadiah/Bonus	186
12.3 Aplikasi Barisan dan Deret Geometri	188
12.3.1 Contoh Menghitung Jarak Tempuh Pantulan Bola.....	188
12.3.2 Contoh Terkait Perkembangbiakan Bakteri	189
12.3.3 Contoh Terkait Kenaikan Gaji dalam Persen.....	190
12.3.4 Contoh Terkait Penurunan Nilai Barang.....	191
DAFTAR PUSTAKA.....	193
BIODATA PENULIS	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Grafik logaritma	20
Gambar 3 1. Grafik dari kurva fungsi kuadrat $a > 0$ Untuk	32
Gambar 3 2. Grafik dari kurva fungsi kuadrat $a > 0$ untuk.....	32
Gambar 3.3. Bagian-bagian dari grafik kurva fungsi kuadrat.....	33
Gambar 3.4. Hubungan nilai diskriminan pada fungsi kuadrat.....	36
Gambar 7.1. Himpunan daerah penyelesaian	81
Gambar 7.2. Himpunan penyelesaian $3x + 8y \leq 24$	83
Gambar 7.3. Himpunan penyelesaian dengan geogebra.....	85
Gambar 7.4. Himpunan penyelesaian dari $3x + 2y$ $\leq 110; x + y \leq 50; x \geq 0; y \geq 0$	87
Gambar 7.5. Himpunan penyelesaian dari $x + y \leq 5; x + 2y \leq 8; x \geq 0; y \geq 0$	89
Gambar 7.6. Titik optimum dengan garis selidik.....	90
Gambar 8.1. Relasi yang menunjukkan hubungan nama siswa dan buah yang disukai.....	94
Gambar 8.2. Fungsi matematika untuk $f(x) = 2x - 1$	97
Gambar 8.3. Ilustrasi domain dan daerah fungsi konstan..	101
Gambar 8.4. Grafik fungsi eksponensial	107
Gambar 8.5. Grafik fungsi logaritma.....	108
Gambar 12.1. Ilustrasi bola memantul	188

BAB 1

EKSPONEN

Oleh Yenny Anggreini Sarumaha

1.1 Pendahuluan

Eksponen merupakan salah satu konsep dasar dalam matematika yang menunjukkan kekuatan suatu bilangan atau variabel. Eksponen adalah sebuah bilangan bulat yang menunjukkan berapa kali sebuah basis digunakan sebagai faktor (McKeague, 2010). Eksponen merupakan cara singkat dalam menulis perkalian berulang (Larson, 2016). Pada ekspresi 3^2 , 3 disebut sebagai basis dan 2 disebut sebagai eksponen (Lial *et al.*, 2021). Ekspresi 3^2 dibaca sebagai “3 pangkat 2” atau “3 kuadrat”. Eksponen 2 menunjukkan penggunaan basis 3 sebagai faktor perkalian sebanyak 2 kali.

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Ekspresi 3^2 sama dengan 9.

Secara umum, jika b adalah bilangan nyata dan n adalah bilangan asli, maka

$$b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b$$

Dimana b adalah basis dan n adalah eksponen (Aufmann, Barker and Nation, 2011; Martin-Gay, 2019).

Berdasarkan contoh, terlihat bahwa eksponen bilangan bulat dapat membentuk notasi untuk merepresentasikan perkalian berulang dari bilangan nyata (Sullivan, 2020) atau faktornya (Aufmann, Barker and Nation, 2011). Penggunaan eksponen ini banyak ditemukan pada berbagai formula atau rumus dalam dunia sains.

1.2 Ekspresi pada Eksponen

Apa yang terjadi ketika bilangan 0 atau 1 digunakan sebagai eksponen? Pertama, sebuah bilangan apabila dipangkatkan dengan 1 akan menghasilkan dirinya sendiri

(Martin-Gay, 2019). Dalam hal ini, kita misalkan sebuah bilangan sebagai a , maka

$$a^1 = a$$

Sedangkan untuk bilangan berpangkat 0, kita akan gunakan definisi berikut.

Sebuah bilangan selain 0 yang dipangkatkan dengan 0 menghasilkan 1. Sehingga, jika a merepresentasikan bilangan bukan 0, maka berlaku benar bahwa $a^0 = 1$ (Aufmann, Barker and Nation, 2011).

Contoh:

$$5^1 = 5$$

$$8^1 = 8$$

$$3^0 = 1$$

$$9^0 = 1$$

1.3 Urutan Operasi Bilangan

Simbol yang digunakan pada operasi bilangan adalah $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, dan simbol yang kita gunakan dalam membentuk grup, seperti $()$ dan $[]$ dalam matematika berfungsi sama seperti halnya tanda baca dalam pelajaran bahasa. Tanpa adanya simbol operasi atau tanda baca, kita akan kebingungan dalam memahami makna yang ada pada sebuah kalimat. Perhatikan ekspresi matematika berikut

$$3 + 5 \cdot 2$$

Apa yang harus dilakukan? Apakah kita harus menjumlahkan 3 dan 5 dulu atau haruskan kita mengalikan 5 dan 2 terlebih dahulu? Hasilnya pasti akan berbeda. Dalam mempelajari matematika, kita ingin menghindari situasi di mana akan diperoleh dua hasil berbeda untuk sebuah soal. Karenanya, kita dapat mengikuti aturan berikut dalam operasi bilangan.

Katika kita menyelesaikan ekspresi matematika, kita akan melakukan operasi bilangan dengan langkah-langkah terstruktur (Mckeague, 2010; Martin-Gay, 2019; Lial *et al.*, 2021).

Jika terdapat simbol pengelompokkan seperti tanda kurung, kurung siku, nilai mutlak, pecahan, maka lakukan sebagai berikut

1. Jika ekspresi dalam bentuk pecahan, maka bekerja secara terpisah bagian atas dan bawah garis pecahan.
2. Jika suatu ekspresi mengandung simbol grup seperti tanda kurung, kurung siku, atau mutlak, maka pertama-tama dioperasikan bilangan yang berada dalam simbol grup tersebut.
3. Kemudian dievaluasi atau disederhanakan, bilangan yang memiliki eksponen
4. Kemudian dioperasikan perkalian dan pembagian secara berurutan, mulai dari kiri ke kanan.
5. Terakhir, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan dari kiri ke kanan.

Jika tidak ada simbol pengelompokkan digunakan, maka lakukan langkah berikut

1. Sederhanakan seluruh pangkat dan akar. Bekerja dari kiri ke kanan.
2. Lakukan perkalian dan pembagian dengan berurutan. Bekerja dari kiri ke kanan.
3. Lakukan penegasian, penjumlahan, pengurangan secara berurutan. Bekerja dari kiri ke kanan.

Berdasarkan aturan yang kita miliki tersebut, maka ekspresi $3 + 5 \cdot 2$ harus diselesaikan dengan pertama-tama mengalikan 5 dan 2 dan kemudian menjumlahkannya dengan 3. Jawaban yang benar dan satu-satunya jawaban untuk ekspresi ini adalah 13.

$$3 + 5 \cdot 2 = 3 + 10 = 13$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \text{Sederhanakan } 7 \cdot 2^3 + 45 \div 3^2 - 6 \\ 7 \cdot 2^3 + 45 \div 3^2 - 6 &= 7 \cdot 8 + 45 \div 9 - 6 \\ &= 56 + 5 - 6 = 55 \end{aligned}$$

1.4 Variabel dan Eksponen

Sebagaimana yang telah kita ketahui bahwa sebuah variabel adalah sebuah huruf yang digunakan untuk merepresentasikan sekumpulan atau sekelompok bilangan. Suatu ekspresi yang terdiri dari kombinasi bilangan, variabel,

simbol operasi, dan simbol pengelompokkan disebut sebagai sebuah ekspresi aljabar (McKeague, 2010). Definisi ini melibatkan penggunaan eksponen dan pecahan. Kita dapat menggunakan definisi eksponen dan sifat komutatif perkalian untuk menuliskan beberapa ekspresi matematika yang memiliki variabel dan eksponen. Kita dapat menuliskan ekspresi $(3x)^2$ dengan menggunakan definisi eksponen sebagai berikut

$$(3^2) = (3x)(3x)$$

Karena ekspresi di bagian kanan adalah perkalian, kita dapat tuliskan

$$(3x)(3x) = 3 \cdot x \cdot 3 \cdot x$$

Dan karena perkalian adalah operasi komutatif, kita dapat mengatur ekspresi ini sehingga bilangan dapat dikelompokkan begitu pula variabelnya:

$$3 \cdot x \cdot 3 \cdot x = (3 \cdot 3)(x \cdot x)$$

Karena $3 \cdot 3 = 9$ dan $x \cdot x = x^2$, kita dapat menuliskan ekspresinya menjadi

$$(3 \cdot 3)(x \cdot x) = 9x^2$$

Secara singkat kita dapat menulis

$$(3x)^2 = (3x)(3x) = (3 \cdot 3)(x \cdot x) = 9x^2$$

Beberapa contoh pengembangan dan penyederhanaan variabel dan eksponen

- a. Kembangkan dan sederhanakan $(4a)^3$

Solusi:

$$\begin{aligned}(4a)^3 &= (4a)(4a)(4a) \\ &= (4 \cdot 4 \cdot 4)(a \cdot a \cdot a) \\ &= 64a^3\end{aligned}$$

- b. Kembangkan dan sederhanakan $(7xy)^2$

Solusi:

$$\begin{aligned}(7xy)^2 &= (7xy)(7xy) \\ &= (7 \cdot 7)(x \cdot x)(y \cdot y) \\ &= 49x^2y^2\end{aligned}$$

- c. Sederhanakan $(2x)^2(5xy)^2$

Solusi:

$$\begin{aligned}(2x)^2(5xy)^2 &= (2x)(2x)(5xy)(5xy) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5)(x \cdot x \cdot x \cdot x)(y \cdot y)\end{aligned}$$

$$= 100x^4y^2$$

d. Sederhanakan $(3x)^4(4x)^3$

Solusi:

$$\begin{aligned}(3x)^4(4x)^3 &= (3x)(3x)(3x)(3x)(4x)(4x)(4x) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \\ &= 5184x^7\end{aligned}$$

1.5 Perkalian dengan Eksponen

Untuk menyederhanakan pekerjaan dengan eksponen, kita dapat mengembangkan beberapa sifat dari eksponen. Sifat pertama dari eksponen berlaku untuk hasil kali dengan basis yang sama (McKeague, 2010; Lial *et al.*, 2021). Kita juga dapat menggunakan definisi dari eksponen sebagai perkalian pecahan untuk menyederhanakan bentuk seperti $5^2 \cdot 5^3$.

$$\begin{aligned}5^2 \cdot 5^3 &= (5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= 3125\end{aligned}$$

Seperti contoh di atas, perkalian dengan basis yang sama menghasilkan penjumlahan dari eksponen. Dapat kita simpulkan, jika a adalah bilangan nyata dan r dan s adalah bilangan bulat, maka (Blitzer, 2023)

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Dengan kata lain, untuk menjumlahkan dua ekspresi dengan basis yang sama, jumlahkan eksponen dan gunakan basis yang sama.

Contoh

- $2^3 \cdot 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$
- $y^5 \cdot y^7 = y^{5+7} = y^{12}$
- $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^9 = 3^{2+4+9} = 3^{15}$

Tipe lain dari ekspresi matematika yang melibatkan eksponen adalah peningkatan ke pangkat lainnya. Sebagai contoh

$$\begin{aligned}(5^3)^2 &= (5^3)(5^3) \\ &= 5^{3+3} = 5^6\end{aligned}$$

Hasil ini mengarahkan kita pada sifat kedua dari eksponen yang menyatakan bahwa Jika a adalah bilangan nyata dan r dan s adalah bilangan bulat, maka (Blitzer, 2023)

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Dengan kata lain, sebuah pangkat yang naik ke pangkat berbeda dengan basis yang sama merupakan hasil penjumlahan dari pangkat tersebut.

Contoh

a. $(3^5)^7 = 3^{5 \cdot 7} = 3^{35}$

b. $(y^3)^5 = y^{3 \cdot 5} = y^{15}$

Sifat ketiga dari eksponen diaplikasikan pada ekspresi di mana hasil kali dari dua atau lebih bilangan atau variabel mengalami kenaikan pangkat. Sebagai contoh ekspresi $(3x)^3$ dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}(3x)^3 &= (3x)(3x)(3x) \\ &= (3 \cdot 3 \cdot 3)(x \cdot x \cdot x) \\ &= 3^3 \cdot x^3 \\ &= 27x^3\end{aligned}$$

Secara umum, sifat ketiga eksponen (Larson, 2016) menyatakan bahwa jika a dan b adalah dua bilangan nyata dan r adalah sebuah bilangan bulat, maka

$$(ab)^r = a^r b^r$$

Dengan kata lain, pangkat dari hasil kali adalah hasil kali dari pangkat.

Contoh:

a. $(7y)^2 = 7^2 \cdot y^2 = 49y^2$

b. $(2xy)^4 = 2^4 \cdot x^4 \cdot y^4 = 16x^4y^4$

c. $(5x^2)^3 = 5^3(x^2)^3 = 125x^6$

1.6 Pembagian dengan Eksponen

Pada sub bab sebelumnya, kita mengetahui bahwa perkalian dengan basis yang sama akan menghasilkan penjumlahan dari eksponen, yaitu $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Karena pembagian adalah operasi invers dari perkalian, kita dapat memperoleh hasil pembagian dengan basis yang sama dalam bentuk pengurangan eksponen (McKeague, 2010). Untuk mengembangkan sifat-sifat eksponen yang melibatkan pembagian, kita dapat mengaplikasikan definisi eksponen sebagai berikut

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} (x \cdot x) = 1 (x \cdot x) = x^2$$

(Perhatikan bahwa $5 - 3 = 2$)

$$\frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$$

(Perhatikan bahwa $5 - 2 = 3$)

Pada kedua contoh berikut terlihat bahwa pembagian dengan basis yang sama akan menghasilkan pengurangan eksponen yang lebih kecil dari yang lebih besar. Masalahnya akan muncul apabila jawabannya berupa pecahan. Masalah ini dapat diselesaikan dengan definisi berikut

Jika r adalah bilangan bulat positif, maka $a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$

($a \neq 0$)

Contoh:

a. $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c. $5x^{-3} = 5 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{5}{x^3}$

Dengan menyelesaikan masalah ini, kita memperoleh sifat keempat dari eksponen yaitu jika a adalah bilangan nyata dan r dan s adalah bilangan bulat, maka (Larson, 2016)

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (a \neq 0)$$

Dengan kata lain, untuk membagi dengan basis yang sama, kurangi eksponen pada penyebut dari eksponen pada pembilang dan naikan basis ke eksponen yang dihasilkan.

Contoh:

a. $\frac{x^7}{x^5} = x^{7-5} = x^2$

b. $\frac{y^3}{y^6} = y^{3-6} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

c. $\frac{3^{10}}{3^{12}} = 3^{10-12} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Sifat terakhir dari eksponen mirip dengan sifat ketiga yang telah kita bahas sebelumnya, tetapi sifat ini melibatkan pembagian.

Jika a dan b adalah dua bilangan nyata ($b \neq 0$) dan r adalah sebuah bilangan bulat, maka

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Dengan kata lain, hasil bagi pada perpangkatan adalah hasil bagi dari pangkat.

Bukti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^r \\ &= a^r \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^r \\ &= a^r \cdot b^{-r} \\ &= a^r \cdot \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Contoh:

- a. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$
- b. $\left(\frac{4}{y}\right)^3 = \frac{4^3}{y^3} = \frac{64}{y^3}$
- c. $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$

Simpulan aturan pangkat untuk eksponen dapat dilihat sebagai berikut (Aufmann, Barker and Nation, 2011; Sullivan, 2020; Blitzler, 2023; Sarumaha, 2024).

Aturan	Contoh	Keterangan
Aturan Eksponen 1		
$(a^m)^n$ $= a^{mn}$	$(2^2)^3$ $= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$ $= 2^{2+2+2}$ $= 2^{2 \cdot 3}$ $= 2^6$	Untuk memangkatkan suatu pangkat, kalikan eksponennya
Aturan Eksponen 2		
$(ab)^m$ $= a^m b^m$	$(5x)^3$ $= (5x)(5x)(5x)$	Untuk memperoleh hasil

$$\begin{aligned}
 &= (5 \cdot 5 \cdot 5)(x \\
 &\cdot x \cdot x) \\
 &= 5^3 x^3
 \end{aligned}$$

perkalian pangkat, setiap faktor dipangkatkan.

Aturan
Eksponen 3
 $a^m a^n$
 $= a^{m+n}$

$$\begin{aligned}
 &x^{-3} \cdot x^5 \\
 &= x^{-3+5} = x^2 \\
 &x \neq 0
 \end{aligned}$$

Perkalian dua eksponen dengan basis sama diperoleh dengan menjumlahkan eksponennya.

Aturan
Eksponen 4
 $\frac{a^m}{a^n}$
 $= a^{m-n}$
 $= \frac{1}{a^{n-m}}$

$$\begin{aligned}
 &\frac{x^{-2}}{x^7} = x^{-2-7} \\
 &= x^{-9}
 \end{aligned}$$

Pembagian dua eksponen dengan basis sama adalah dengan mengurangi pangkat pembilang dari penyebut.

Jika
 $a \neq 0$
Aturan
Eksponen 5

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{a}{b}\right)^m \\
 &= \frac{a^m}{b^m} \\
 &(b \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\
 &= \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} \\
 &= \frac{3^2}{5^2}
 \end{aligned}$$

Untuk memperoleh hasil bagi berpangkat, pembilang dan penyebut masing-masing dipangkatkan

Untuk seluruh bilangan bulat m dan n dan seluruh bilangan nyata a dan b , aturan berikut adalah benar.

1.7 Eksponen Tertentu

1.7.1 Nol dan Satu sebagai Eksponen

Kita memiliki dua eksponen spesial yang harus diperhatikan, yaitu 0 dan 1. Untuk memperoleh ekspresi x^1 , kita akan menyelesaikan masalah dengan dua cara, sebagai berikut

$$\frac{x^3}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x$$
$$\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1$$

Secara umum, aturan ini menyatakan bahwa $a^1 = a$. Kita dapat menggunakan prosedur yang sama untuk memperoleh ekspresi x^0 .

$$\frac{4^2}{4^2} = \frac{16}{16} = 1$$
$$\frac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = 4^0$$

Karenanya, definisi terbaik untuk x^0 adalah 1 untuk seluruh x kecuali $x = 0$ (Blitzer, 2023). Dalam hal ini, pada kasus $x = 0$, akan diperoleh 0^0 yang tidak didefinisikan (Marin-Gay, 2012). Kebanyakan orang mendefinisikan x^0 sebagai 0 ketika pertama melihatnya. Perlu diingat, bahwa nol pada ekspresi tersebut berperan sebagai eksponen, sehingga x^0 bukan berarti dikalikan dengan nol. Sehingga kita dapat membuat simpulan bahwa $a^0 = 1$ untuk seluruh bilangan nyata kecuali $a = 0$ (Lial *et al.*, 2021).

Untuk mengilustrasikan mengapa x^0 didefinisikan sama dengan 1, misalkan $x^n \cdot x^0$, untuk $x \neq 0$.

Kita mau mendefinisikan x^0 secara konsisten sehingga hasil kali eksponen berlaku. $x^n \cdot x^0 = x^{n+0} = x^n$.

Hasil kali dari x^n dan x^0 adalah x^n , jadi x^0 di sini bersifat sebagai elemen identitas 1. Sehingga, untuk konsistensi, kita definisikan x^0 sama dengan 1. (0^0 tidak dapat didefinisikan).

Contoh:

- $5^0 = 1$
- $3^1 = 3$
- $7^0 + 7^1 = 1 + 7 = 8$
- $(2x^4y)^0 = 1$

1.7.2 Eksponen Negatif dan Hasil Bagi

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan kita ingin mendefinisikan x^{-n} konsisten sebagai hasil kali. Perhatikan hasil kali $x^n \cdot x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^0 = 1$. Ekspresi x^{-n} bertindak sebagai kebalikan dari x^n , yang dituliskan sebagai $\frac{1}{x^n}$, sehingga kedua ekspresi ini haruslah ekuivalen (Blitzer, 2023).

Misalkan x adalah bilangan nyata tak nol dan n adalah bilangan bulat (Sullivan, 2020). $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Contoh

a. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{125}} = 1 \div \frac{27}{125} = 1 \cdot \frac{125}{27} = \frac{125}{27}$

c. $(xy)^{-5} = \frac{1}{(xy)^5} = \frac{1}{x^5 y^5}$

Perlu diperhatikan bahwa eksponen negatif menunjukkan kebalikan bukan perubahan ekspresi.

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dan x adalah bilangan nyata tak nol.

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Dengan kata lain, ketika membagi eksponen yang berbasis sama, basis tetap digunakan dan eksponen penyebut dikurangi dari eksponen pembilang.

Contoh

a. $\frac{8^5}{8^3} = 8^{5-3} = 8^2$

b. $\frac{20k^{-8}}{16k^{12}} = \frac{16}{20} \cdot k^{-8-12} = \frac{4}{5} k^{-20} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{k^{20}} = \frac{4}{5k^{20}}$

1.8 Notasi Saintifik pada Eksponen

Sebuah bilangan yang ditulis sebagai hasil kali dari sebuah bilangan n , di mana $1 \leq n < 10$ dikali pangkat 10 merupakan notasi saintifik. $n \times 10^r$ dan r adalah bilangan bulat (Sullivan, 2020; Blitzer, 2023).

Karena eksponen negatif memberikan kita umpan balik, kita dapat menggunakan eksponen negatif untuk menuliskan bilangan yang sangat kecil dalam notasi saintifik. Sebagai

contoh, bilangan 0,00023, ketika ditulis dalam notasi saintifik, akan ekuivalen dengan $2,3 \times 10^{-4}$, berikut penjelasannya

$$2,3 \times 10^{-4} = 2,3 \times \frac{1}{10^4} = 2,3 \times \frac{1}{10000} = \frac{2,3}{10000} = 0,00023$$

Perhatikan beberapa contoh berikut

Bilangan dalam bentuk panjang		Bilangan dalam notasi saintifik
125.000	=	$1,25 \times 10^5$
34.700	=	$3,47 \times 10^4$
6.300	=	$6,3 \times 10^3$
415	=	$4,15 \times 10^2$
27	=	$2,7 \times 10^1$
9	=	9×10^0
0,17	=	$1,7 \times 10^{-1}$
0,086	=	$8,6 \times 10^{-2}$
0,00643	=	$6,43 \times 10^{-3}$
0,0002	=	2×10^{-4}
0,000075	=	$7,5 \times 10^{-5}$

Perhatikan bahwa ketika bilangan ditulis dalam notasi saintifik, titik desimal terletak setelah bilangan pertama sehingga bilangan berada antara 1 dan 10.

1.9 Operasi pada Monomial

Monomial adalah satu bentuk ekspresi yang terdiri dari bilangan atau konstanta maupun hasil kali dari konstanta dan satu atau lebih variabel yang memiliki eksponen bilangan asli (McKeague, 2010). Contoh monomial adalah sebagai berikut

$$-2 \quad 11x \quad -53xy^2 \quad 36x^2y^4z^6 \quad \frac{7}{9}a^3b^2$$

1.9.1 Perkalian dan Pembagian Monomial

Terdapat dua langkah dasar dalam menyelesaikan perkalian monomial. Pertama, kita menuliskan kembali hasil kali menggunakan sifat komutatif dan asosiatif. Kemudian, kita dapat menyederhanakan dengan mengalikan koefisien dan menjumlahkan eksponen dengan basis yang sama.

Contoh

- a. $(-2x^2)(5x^3) = (-2 \cdot 5)(x^2 \cdot x^3) = -10x^5$
 b. $\left(\frac{3}{5}x^4y^3\right)(20x^5y^2) = \left(\frac{3}{5} \cdot 20\right)(x^4x^5)(y^3y^2) = 12x^9y^5$

Pada contoh dapat dilihat bahwa pengerjaan keduanya sama yaitu mengalikan koefisien dan menjumlahkan eksponen dengan basis yang sama. Hal ini juga berlaku pada pembagian monomial. Karena sifat yang kita gunakan bersifat konsisten, pembagian monomial akan menghasilkan pembagian koefisien dan pengurangan eksponen dengan basis yang sama.

Contoh

- a. $\frac{18x^3}{3x^2} = \frac{18}{3} \cdot \frac{x^3}{x^2} = 6x$
 b. $\frac{28x^3y^2}{4xy^5} = \frac{28}{4} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^2}{y^5} = 7x^2 \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{7x^2}{y^3}$

Pada contoh b di atas, ekspresi $\frac{y^2}{y^5}$ kita sederhanakan menjadi $\frac{1}{y^3}$ karena sifat keempat dari eksponen dan definisi dari eksponen negatif. Bentuk penjabaran dari operasi ini adalah sebagai berikut

$$\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

Penjelasan ini bermaksud menegaskan bahwa kita mungkin tidak menunjukkan seluruh langkah pengerjaan dalam menyederhanakan sebuah ekspresi yang melibatkan eksponen, tetapi hasil yang kita peroleh dapat dijustifikasi dengan menggunakan sifat-sifat dari eksponen.

1.9.2 Perkalian dan Pembagian Bilangan dalam Notasi Saintifik

Kita mengalikan dan membagi bilangan dalam notasi saintifik menggunakan langkah-langkah yang sama dengan perkalian dan pembagian monomial.

Contoh

- a. $(3 \times 10^5)(2 \times 10^{-3}) = (3 \times 2)(10^5 \times 10^{-3}) = 6 \times 10^2$
 Perhatikan bahwa kita menjumlahkan eksponen, $5 + (-3) = 2$, ketika kita mengalikan dengan basis yang sama.
 b. $\frac{6,4 \times 10^{12}}{4 \times 10^8} = \frac{6,4}{4} \times \frac{10^{12}}{10^8} = 1,6 \times 10^4$

Prosedur yang digunakan pada kedua contoh di atas sangat mirip dengan perkalian dan pembagian monomial, di mana kita mengalikan atau membagi koefisien dan menjumlahkan atau mengurangi eksponen.

1.9.3 Penjumlahan dan Pengurangan Monomial

Penjumlahan dan pengurangan monomial sangat identik karena pengurangan merupakan kebalikan dari penjumlahan atau invers penjumlahan. Dengan perkalian dan pembagian monomial, kita dapat melihat bahwa kuncinya adalah menyusun kembali bilangan dan variabel menggunakan sifat komutatif dan asosiatif. Pada penjumlahan, kuncinya adalah menggunakan sifat distributif. Kadang kita menggunakan frase mengkombinasikan monomial untuk mendeskripsikan penjumlahan dan pengurangan monomial. Dengan kata lain, dua bentuk monomial dengan variabel yang sama (memiliki eksponen yang sama) memiliki bentuk yang sama. Kita hanya dapat menjumlahkan bentuk yang sama. Hal ini dikarenakan sifat distributif (kunci dari penjumlahan monomial) tidak bisa diaplikasikan pada bentuk yang tidak sama.

Contoh

- a. $-3x^3 + 15x^3 = (-3 + 15)x^3 = 12x^3$
- b. $7x^2y - 16x^2y = (7 - 16)x^2y = -9x^2y$
- c. $4x^2 + 6y^2$

1.10 Kesalahan Umum yang Melibatkan Eksponen

Ada beberapa kesalahan umum yang sering terjadi dalam mengoperasikan eksponen, di antaranya (McKeague, 2010; Blitzer, 2023)

- a. Jika sebuah bentuk terdiri dari sebuah variabel yang memiliki pangkat, maka eksponen pada variabel diasosiasikan hanya dengan variabel tersebut, kecuali terdapat tanda kurung, seperti ekspresi $5x^2$ berarti $5 \cdot x \cdot x$ bukan $5x \cdot 5x$. Ini adalah kesalahan umum ketika menulis $5x^2$ sebagai $25x^2$. Agar menghasilkan $25x^2$ kita dapat mulai dari $(5x)^2$.

- b. Kesalahan terjadi ketika menjumlahkan bentuk yang tidak sama. Sebagai contoh, $3x$ dan $4x^2$ adalah bentuk yang tidak sama karenanya tidak bisa dikombinasikan, $3x + 4x^2 \neq 7x^3$. Jika ingin mengujinya, cukup substitusi 10 untuk x pada ekspresi tersebut dan akan terlihat bahwa kedua ruas tidak memberi hasil yang sama.
- c. Kesalahan terjadi ketika kita mendistribusikan eksponen terlebih dahulu dibandingkan penjumlahan dan pengurangan, sebagai contoh $(a + b)^2$ tidak menghasilkan $a^2 + b^2$. Kita dapat mengujinya dengan mengganti $a = 1$ dan $b = 2$, hasilnya akan berbeda.
- d. Kesalahan umum yang sering terjadi lainnya adalah ketika membagi polinomial dengan monomial. Sebagai contoh

$$\frac{x + 3}{3} = x + 1 \quad (\text{Salah})$$

Kesalahan yang terjadi adalah tidak membagi kedua bentuk dengan 3. Cara yang benar untuk membagi $x + 3$ dengan 3 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{x + 3}{3} &= \frac{x}{3} + \frac{3}{3} \\ &= \frac{x}{3} + 1 \end{aligned} \quad (\text{Benar})$$

1.11 Bilangan Rasional sebagai Eksponen

Notasi lain yang melibatkan eksponen membuka kesempatan untuk merancang akar kuadrat, akar pangkat tiga, dan seterusnya. Perhatikan persamaan $x = 8^{\frac{1}{3}}$. Walaupun kita belum menemukan eksponen berbentuk pecahan sebelumnya, kita dapat mengasumsikan seluruh sifat eksponen berlaku pada kasus ini. Dengan memangkattigakan kedua ruas dari persamaan, kita peroleh

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\ x^3 &= 8^{\left(\frac{1}{3}\right)(3)} \\ x^3 &= 8^1 \\ x^3 &= 8 \end{aligned}$$

Pada baris terakhir terlihat bahwa x adalah bilangan

yang pangkat tiganya adalah 8. Maka, benar bahwa x adalah akar pangkat tiga dari 8, $x = \sqrt[3]{8}$. Karena kita mulai dengan $x = 8^{\frac{1}{3}}$, maka $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$.

Sehingga diperoleh definisi jika x adalah bilangan nyata dan n adalah bilangan bulat positif lebih besar dari 1, maka

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (x \geq 0 \text{ ketika } n \text{ adalah genap})$$

Dengan kata lain, kuantitas $x^{\frac{1}{n}}$ adalah akar ke- n dari x (Martin-Gay, 2019; Blitzer, 2023).

Contoh

- $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$
- $-36^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{36} = -6$
- $(-49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-49}$, yang mana bukan bilangan nyata.
- $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

Sifat-sifat eksponen di sub bab sebelumnya diaplikasikan hanya dalam bentuk eksponen bilangan bulat. Sekarang, sifat-sifat tersebut juga melibatkan eksponen rasional.

Contoh

- $\sqrt[3]{x^9 y^{12}} = (x^9 y^{12})^{\frac{1}{3}} = (x^9)^{\frac{1}{3}} (y^{12})^{\frac{1}{3}} = x^3 y^4$
- $\sqrt[4]{256 k^8 l^{20}} = (256 k^8 l^{20})^{\frac{1}{4}} = 256^{\frac{1}{4}} (k^8)^{\frac{1}{4}} (l^{20})^{\frac{1}{4}} = 4 k^2 l^5$

Sejauh ini, pembilang dari semua eksponen rasional yang kita temui adalah 1. Teorema berikut memperluas apa yang bisa kita lakukan terhadap eksponen rasional yang memiliki pembilang selain 1.

Teorema Eksponen Rasional (Mckeague, 2010; Sullivan, 2020; Lial *et al.*, 2021)

Jika a adalah sebuah bilangan nyata bukan negatif, m adalah bilangan bulat, dan n adalah bilangan bulat positif, maka

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Contoh penggunaan teorema

- $9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 3^3 = 27$

$$\text{b. } 25^{-\frac{3}{2}} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\text{c. } \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Rasional eksponen juga digunakan dalam perkalian, pembagian, pemfaktoran, dan penyederhanaan beberapa ekspresi yang menyerupai polinomial. Perhatikan beberapa contoh berikut

$$\text{a. } y^{\frac{2}{3}} \left(y^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right) = y^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{6}{3}} - y^{\frac{3}{3}} = y^2 - y$$

$$\text{b. } (x^{\frac{1}{3}} - 2)(x^{\frac{1}{3}} + 5) = x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 10 = x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 10$$

$$\text{c. } \frac{15x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 20x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = \frac{15x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} - \frac{20x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} - 4xy^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{d. } (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}{1} \cdot \frac{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2 + 4 - x^2}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Aufmann, R.N., Barker, V.C. and Nation, R.D. (2011) *College Algebra and Trigonometry*. Seventh. Belmont: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Blitzer, R.F. (2023) *Algebra and Trigonometry*. Seventh Ed. Harlow: Pearson Education Limited.
- Larson, R. (2016) *Algebra and Trigonometry*. Seventh Ed. Boston: Cengage Learning.
- Lial, M.L. *et al.* (2021) *College Algebra & Trigonometry*. Seventh. New Jersey: Pearson Education Inc.
- Marin-Gay, E. (2012) *Basic College Mathematics with Early Integers*. Second. Pearson Education Inc.
- Martin-Gay, E. (2019) *Basic College Mathematics*. Sixth. Pearson Education Inc.
- Mckeague, C.P. (2010) *Basic Mathematics*. Seventh. Belmont: Brooks/Cole.
- Sarumaha, Y.A. (2024) 'Bilangan Bulat', in *Matrikulasi matematika dasar*. Padang: Get Press Indonesia, pp. 1–16.
- Sullivan, M. (2020) *Algebra & Trigonometry*. Eleventh. Pearson Education Inc.

BAB 2

LOGARITMA

Oleh Hetty Elfina

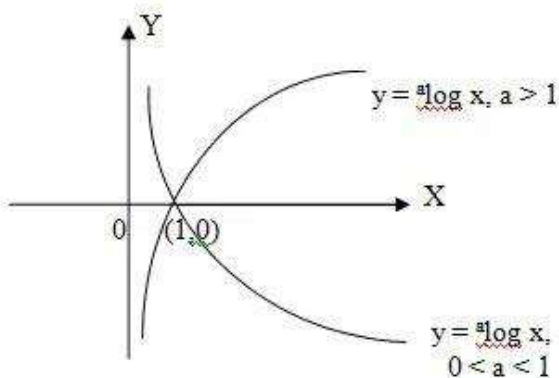
2.1 Pendahuluan

Logaritma adalah bentuk invers (kebalikan) dari eksponen (perpangkatan). Contohnya $2^3 = 8$ dapat ditulis menjadi ${}^2\log 8 = 3$ dan $4^{-2} = \frac{1}{16}$ dapat ditulis menjadi ${}^4\log \frac{1}{16} = -2$.

Bentuk umum logaritma dapat dinyatakan dengan $a^n = m$ menjadi ${}^a\log m = n$. a merupakan bilangan pokok logaritma dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$. Jika a atau bilangan pokok bernilai 10, biasanya angka 10 tidak dituliskan, seperti ${}^{10}\log b = c$ akan ditulis menjadi $\log b = c$. Ketika bilangan pokoknya e atau euler dengan $e = 2,718281828$ maka nilai logaritma dinyatakan dengan $\ln$ (logaritma natural). Misalnya ${}^e\log b = \ln b$ (Prasojo, Amir, 2016)

2.2 Grafik Fungsi Logaritma

Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^a\log x$ untuk bilangan pokok $a > 1$ merupakan fungsi naik. Sedangkan jika $0 < a < 1$ merupakan fungsi turun. Bentuk grafik fungsi naik dan turun dapat dilihat sebagai berikut :



Gambar 2.1. Grafik Logaritma $y = {}^a\log x$

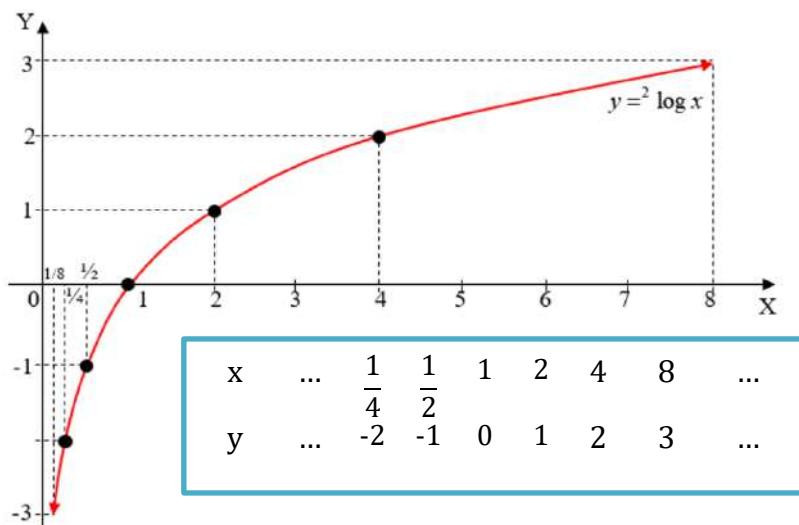
(Sumber : <https://mathsteria.wordpress.com/2014/07/19/soal-dan-pembahasan-fungsi-logaritma/>)

Contoh membuat grafik adalah sebagai berikut :

Buatlah grafik dari $y = {}^2\log x$

Penyelesaian :

Untuk membuat grafik, terlebih dahulu dibuat tabel yang berisi nilai x . Lalu dicari nilai y dan kemudian memasangnkan setiap titik ke grafik, sehingga gambar yang dihasilkan sebagai berikut



(Waluyo, Sunardi, 2013)

2.3 Sifat – Sifat Logaritma

Sifat-sifat logaritma digunakan untuk mempermudah perhitungan. Berikut beberapa sifat logaritma:

a. ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$

b. ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$

c. ${}^a\log b^n = n \cdot {}^a\log b$

d. ${}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m} {}^a\log b$

e. ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$

f. ${}^a\log b = -\frac{1}{b\log a}$

g. ${}^a\log a = 1$

h. ${}^a\log a^n = n$

i. ${}^a\log 1 = 0$

j. ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$

Contoh :

Untuk soal 1 – 4, tentukan nilai dari

1. ${}^2\log 18 + {}^2\log 4 - {}^2\log 9 =$

Penyelesaian :

$${}^2\log 18 + {}^2\log 4 - {}^2\log 9 =$$

$${}^2\log \left(\frac{18 \times 4}{9} \right) =$$

$${}^2\log 8 =$$

$${}^2\log 2^3 =$$

$$3 \times {}^2\log 2 =$$

$$3 \times 1 = 3$$

2. ${}^2\log 8 + {}^3\log 9 + {}^5\log 125 =$

Penyelesaian :

$${}^2\log 8 + {}^3\log 9 + {}^5\log 125 =$$

$${}^2\log 2^3 + {}^3\log 3^2 + {}^5\log 5^3 =$$

$$(3 \times {}^2\log 2) + (2 \times {}^3\log 3) + (3 \times {}^5\log 5) =$$

$$(3 \times 1) + (2 \times 1) + (3 \times 1) =$$

$$3 + 2 + 3 = 8$$

$$3. \quad {}^8\log 4 + {}^{27}\log \frac{1}{9} =$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} {}^8\log 4 + {}^{27}\log \frac{1}{9} &= \\ {}^{2^3}\log 2^2 + {}^{3^3}\log 3^{-2} &= \\ \left(\frac{2}{3} \times {}^2\log 2\right) + \left(-\frac{2}{3} \times {}^3\log 3\right) &= \\ \left(\frac{2}{3} \times 1\right) + \left(-\frac{2}{3} \times 1\right) &= \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

$$4. \quad \text{Diketahui : } \log p = a$$

$$\log q = b$$

Nilai dari $\log p^3 q^2$ adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \log p^3 q^2 &= \log p^3 + \log q^2 \\ &= (3 \times \log p) + (2 \times \log q) \\ &= 3a + 2b \end{aligned}$$

$$5. \quad \text{Diketahui :}$$

$${}^2\log 3 = m$$

$${}^2\log 5 = n$$

Nilai dari ${}^2\log 90$ adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} {}^2\log 90 &= {}^2\log 3^2 \times 5 \times 2 \\ &= {}^2\log 3^2 + {}^2\log 5 + {}^2\log 2 \\ &= (2 \times {}^2\log 3) + {}^2\log 5 + {}^2\log 2 \\ &= 2m + n + 1 \end{aligned}$$

$$6. \quad {}^p\log 2 = 8 \text{ dan } {}^q\log 8 = 4$$

Jika $s = p^4$ dan $t = q^2$, hasil dari ${}^t\log s$ adalah ...

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} {}^p\log 2 = 8 \text{ maka } p &= 2^{\frac{1}{8}} \\ {}^q\log 8 = 4 \text{ maka } q &= 8^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^t\log s &= {}^{q^2}\log p^4 \\
 &= \frac{4}{2} \times {}^q\log p \\
 &= 2 \times {}^{2^{\frac{3}{4}}}\log 2^{\frac{1}{8}} \\
 &= 2 \times \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} {}^2\log 2 \\
 &= 2 \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\right) \times 1 \\
 &= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

7. Diketahui $a = {}^4\log x$ dan $b = {}^2\log x$. Jika ${}^4\log b + {}^2\log a = 2$, maka nilai $a + b = \dots$

Penyelesaian :

$$a = {}^4\log x$$

$$a = {}^{2^2}\log x$$

$$a = \frac{1}{2} \times {}^2\log x$$

$$2a = {}^2\log x \text{ dan } b = {}^2\log x$$

$$\text{Maka diperoleh } 2a = b$$

Dari soal diketahui ${}^4\log b + {}^2\log a = 2$

$$\frac{1}{2} \times {}^2\log b + {}^2\log a = 2$$

$${}^2\log b^{\frac{1}{2}} + {}^2\log a = 2$$

$${}^2\log \left(b^{\frac{1}{2}} \times a\right) = 2$$

Dengan menggunakan bentuk logaritma $a^n = m$ menjadi ${}^a\log m = n$

Maka ${}^2\log \left(b^{\frac{1}{2}} \times a\right) = 2$ dapat diubah menjadi $b^{\frac{1}{2}} \times a = 2^2$

$$(2a)^{\frac{1}{2}} \times a = 4$$

$$\left((2a)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times (a)^2 = (4)^2$$

$$2a \times a^2 = 16$$

$$2a^3 = 16$$

$$a^3 = 8$$

$$a = 2$$

$$2a = b \text{ maka } b = 4$$

$$\text{Nilai } a + b = 6$$

$$8. \text{ Hasil dari } \frac{({}^5\log 10)^2 - ({}^5\log 2)^2}{{}^5\log \sqrt{20}} \text{ adalah ...}$$

Penyelesaian :

Pada soal diatas, dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat aljabar, yaitu

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\frac{({}^5\log 10)^2 - ({}^5\log 2)^2}{{}^5\log \sqrt{20}} =$$

$$\frac{({}^5\log 10 + {}^5\log 2)({}^5\log 10 - {}^5\log 2)}{{}^5\log 20^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{({}^5\log(10 \times 2))({}^5\log(\frac{10}{2}))}{\frac{1}{2} \times {}^5\log 20} =$$

$$\frac{({}^5\log 20)({}^5\log 5)}{\frac{1}{2} \times {}^5\log 20} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2.4 Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma merupakan suatu persamaan yang berkaitan dengan sifat-sifat logaritma. Konsep persamaan logaritma diantaranya adalah

$$a. {}^a\log f(x) = {}^a\log g(x) \text{ maka } f(x) = g(x) \text{ dengan syarat } f(x) > 0 \text{ dan } g(x) > 0$$

- b. ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$ maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$
- c. ${}^{f(x)}\log b = {}^{g(x)}\log b$ maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $b > 0, f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0, g(x) \neq 1$
- d. ${}^{f(x)}\log h(x) = {}^{g(x)}\log h(x)$ maka $f(x) = g(x)$ dan $h(x) = 1$ dengan syarat $h(x) > 0, f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0, g(x) \neq 1$.

(Kurniati, 2016)

Pada persamaan logaritma, yang perlu diperhatikan adalah ruas kiri dan kanan harus memuat bentuk logaritma.

Contoh :

1. Tentukan nilai x dari persamaan ${}^5\log(3x - 1) = {}^5\log 2$

Penyelesaian :

Berdasarkan konsep logaritma ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$ maka $f(x) = g(x)$ dengan syarat $f(x) > 0$

Soal di atas dapat diselesaikan menjadi

$${}^5\log(3x - 1) = {}^5\log 2$$

$$(3x - 1) = 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Saat $x = 1$ maka $f(x) = 3x - 1$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 2$$

Karena $f(x) > 0$ maka nilai $x = 1$ memenuhi persamaan tersebut.

2. Tentukan nilai x dari persamaan ${}^2\log(2x - 2) = 3$

Penyelesaian :

Agar kedua ruas memuat bentuk logaritma, maka perlu dilakukan modifikasi

$${}^2\log(2x - 2) = 3$$

$${}^2\log(2x - 2) = {}^2\log 2^3$$

$${}^2\log(2x - 2) = {}^2\log 8$$

Berdasarkan konsep logaritma ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$ maka

$f(x) = g(x)$ dengan syarat $f(x) > 0$

Soal di atas dapat diselesaikan menjadi

$$(2x - 2) = 8$$

$$2x = 8 + 2$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Saat $x = 5$ maka $f(x) = 2x - 2$

$$f(5) = 2(5) - 2 = 10 - 2 = 8$$

Karena $f(x) > 0$, maka nilai $x = 5$ merupakan solusi penyelesaian.

3. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$${}^9\log(2x - 5) + {}^9\log x = 0,5$$

Penyelesaian :

Agar kedua ruas memuat bentuk logaritma, maka perlu dilakukan modifikasi

$${}^9\log(2x - 5) + {}^9\log x = 0,5$$

$${}^9\log(2x - 5) + {}^9\log x = {}^9\log 9^{\frac{1}{2}}$$

$${}^9\log((2x - 5)x) = {}^9\log \sqrt{9}$$

$$2x^2 - 5x = \sqrt{9}$$

$$2x^2 - 5x = 3$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ atau } x_2 = 3$$

Maka nilai x yang memenuhi adalah $-\frac{1}{2}$ atau 3

4. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$${}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 8 = 3$$

Penyelesaian :

Agar kedua ruas memuat bentuk logaritma, maka perlu dilakukan modifikasi

$${}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 8 = 3$$

$${}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 8 = {}^2\log 2^3$$

$$\begin{aligned}
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 8 &= {}^2\log 8 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 8 - {}^2\log 8 &= 0 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - ({}^2\log 8 + {}^2\log 8) &= 0 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - ({}^2\log(8 \times 8)) &= 0 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 64 &= 0 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - {}^2\log 2^6 &= 0 \\
{}^2\log^2 x + {}^2\log x - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Misalkan :

$$\begin{aligned}
{}^2\log x &= a \\
a^2 + a - 6 &= 0 \\
(a + 3)(a - 2) &= 0 \\
a_1 = -3 \text{ atau } a_2 &= 2
\end{aligned}$$

Untuk $a_1 = -3$

$$\begin{aligned}
{}^2\log x &= -3 \\
2^{-3} &= x \\
\frac{1}{2^3} &= x \\
\frac{1}{8} &= x
\end{aligned}$$

Untuk $a_2 = 2$

$$\begin{aligned}
{}^2\log x &= 2 \\
2^2 &= x \\
4 &= x
\end{aligned}$$

Maka nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{8}$ atau 4

5. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$\log \log(x + 3) + \log 2 = \log \log 16x$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
\log \log(x + 3) + \log 2 &= \log \log 16x \\
\log(\log(x + 3)2) &= \log(\log 16x) \\
\log(2 \log(x + 3)) &= \log(\log 16x) \\
\log(\log(x + 3)^2) &= \log(\log 16x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x + 3)^2 &= 16x \\
 x^2 + 6x + 9 &= 16x \\
 x^2 - 10x + 9 &= 0 \\
 (x - 9)(x - 1) &= 0 \\
 x_1 &= 9 \text{ atau } x_2 = 1
 \end{aligned}$$

2.5 Model Matematika Berbentuk Logaritma

Dalam kehidupan ada banyak persoalan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep logaritma. Contoh penggunaannya sebagai berikut :

1. Misalkan jika masuk ke bawah permukaan laut, maka intensitas cahaya akan berkurang 2,5% per meter. Hitunglah di kedalaman berapa intensitas cahaya tersisa 50% dari intensitas cahaya di permukaan laut?

Penyelesaian :

Sebelum menyelesaikan soal di atas, terlebih dahulu dibuat permisalan

$$\begin{aligned}
 A &= \text{intensitas cahaya pada kedalaman } t = 50\% = 0,5 \\
 A_0 &= \text{intensitas cahaya di permukaan laut} = 100\% = 1 \\
 i &= \text{pengurangan intensitas cahaya per meter} = 2,5\% = 0,025
 \end{aligned}$$

Soal diatas merupakan soal peluruhan, sehingga menggunakan rumus $A = A_0(1 - i)^t$

$$\text{Maka } 0,5 = 1(1 - 0,025)^t$$

$$0,5 = 1(0,975)^t$$

$$t = 0,975 \log 0,5$$

$$t = \frac{\log 0,5}{\log 0,975}$$

$$t = 27,38$$

Jadi saat kedalaman 27,38 meter, intensitas cahaya tersisa 50% dari intensitas cahaya di permukaan laut.

2. Seorang nasabah menabung sebesar x . Jika dalam 10 tahun uang nasabah menjadi Rp 10.000.000,- dan bank memberikan bunga majemuk 20% per tahun, maka hitunglah besar uang yang ditabung di awal.

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan persoalan di atas, maka terlebih dahulu dibuat permisalan

U_0 = uang yang ditabung mula – mula

U = uang yang ditabung selama 10 tahun

= Rp 10.000.000, –

i = bunga majemuk = 20% = 0,2

t = lama waktu menabung = 10 tahun

Soal di atas merupakan soal pertumbuhan, sehingga menggunakan rumus $U = U_0(1 + i)^t$

$$10.000.000 = U_0(1 + 0,2)^{10}$$

$$10.000.000 = U_0(1,2)^{10}$$

$$U_0 = \frac{10.000.000}{1,2^{10}}$$

$$U_0 = 10^7 \times (1,2)^{-10}$$

$$\log U_0 = \log 10^7 + \log(1,2)^{-10}$$

$$\log U_0 = (7 \times \log 10) - 10 \times \log 1,2$$

$$\log U_0 = 7 - 10(0,079)$$

$$\log U_0 = 7 - 0,79$$

$$\log U_0 = 6,21$$

$$U_0 = 1.621.810,097$$

$$U_0 \approx \text{Rp } 1.621.810$$

Jadi setoran awal tabungan adalah Rp 1.621.810
(Waluyo, Sunardi, 2013)

DAFTAR PUSTAKA

- Prasojo, Amir. 2016. *Buku Ajar Matematika Dasar*. Sidoarjo : Umsida Press
- Waluyo, Sunardi. 2013. *Konsep dan Penerapan Matematika*. Jakarta : Bumi Aksara
- Kuniati, Rahma. 2016. *Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma*. (https://www.academia.edu/32609571/PERSAMAAN_DAN_PERTIDAKSAMAAN_LOGARITMA)

BAB 3

FUNGSI KUADRAT

Oleh Siti Ulfa Nabila

3.1 Pendahuluan

Fungsi merupakan relasi atau hubungan yang menghubungkan daerah asal ke daerah hasil. Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi dengan pangkat variabel tertingginya adalah dua.

Definisi lain dari fungsi kuadrat yaitu merupakan bagian dari konsep matematika yang mempelajari pola atau hubungan antara dua variabel yaitu variabel x dan y , dimana salah satu variabel memiliki pangkat kuadrat dari variabel lainnya.

Fungsi Kuadrat dapat dinyatakan dalam Bentuk Umum yaitu:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \text{ dan } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Koefisien dalam fungsi kuadrat dilambangkan dengan a, b dan c .

- a disebut koefisien dari suku kuadrat (x^2)
- b disebut koefisien dari suku linier (x)
- c disebut konstanta

Contoh bentuk-bentuk fungsi kuadrat

- $y = x^2 + 2x + 6$
- $y = 3x^2 + 5x$
- $y = \frac{17}{11}x^2 + \frac{3}{7}$
- $y = 3x^2$
- $y = 2x + 6$ (*bukan fungsi kuadrat*)

(Ahmad Zaelani et al., 2006; Edo, 2023)

3.2 Grafik Fungsi Kuadrat

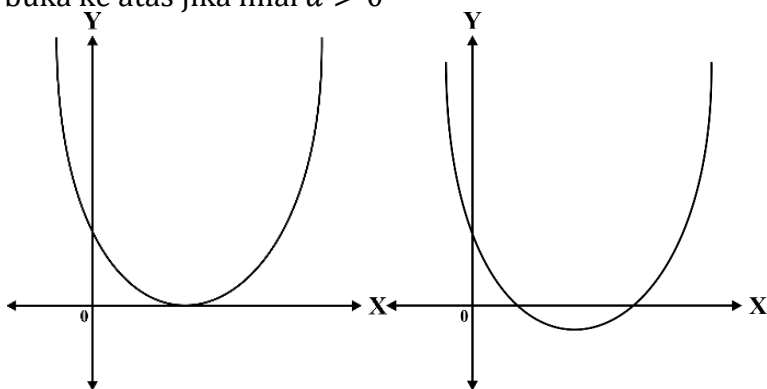
Suatu fungsi kuadrat dapat ditransformasikan secara visual dalam diagram kartesius. Umumnya Kurva yang

dihasilkan oleh Fungsi Kuadrat akan menyerupai bentuk parabola, dimana parabola dapat terbuka ke atas atau parabola dapat terbuka ke bawah.

Komponen atau bagian-bagian dari suatu grafik fungsi kuadrat yaitu memiliki titik ekstrim atau puncak, memiliki sumbu simetri, titik potong pada sumbu x dan titik potong pada sumbu y. Apabila bagian-bagian tersebut sudah didapatkan, maka fungsi kuadrat siap untuk dirubah ke dalam bentuk grafik.

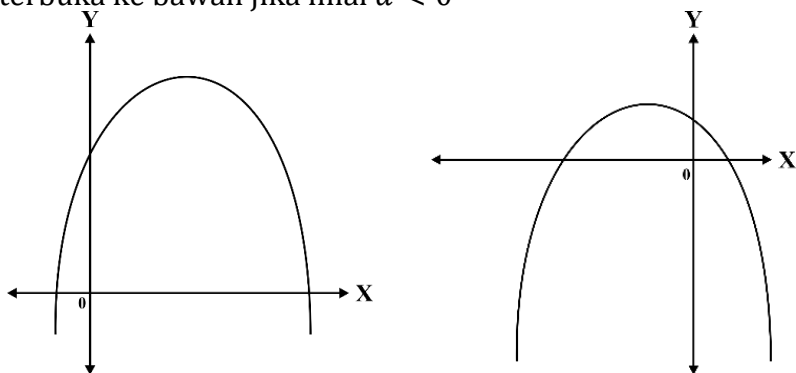
Jenis-jenis Grafik Fungsi Kuadrat

- a. Grafik pada Fungsi Kuadrat menyerupai kurva parabola terbuka ke atas jika nilai $a > 0$



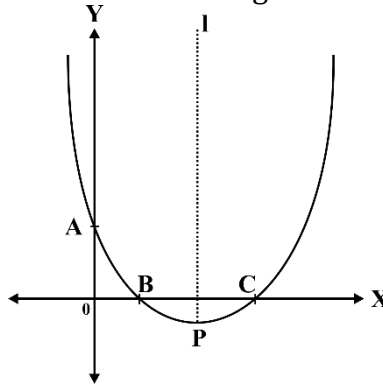
Gambar 3.1. Grafik dari Kurva Fungsi Kuadrat untuk $a > 0$

- b. Grafik Fungsi pada Kuadrat menyerupai kurva parabola terbuka ke bawah jika nilai $a < 0$



Gambar 3.2 Grafik dari kurva Fungsi Kuadrat untuk $a < 0$

Bagian-bagian dari Grafik kurva Fungsi Kuadrat



Gambar 3.3 Bagian-bagian dari grafik Kurva Fungsi Kuadrat

Dari gambar tersebut diperoleh:

- $A(0, y)$ adalah titik potong kurva dengan sumbu Y
- $B(x_1, 0)$ dan $C(x_2, 0)$ adalah titik potong kurva dengan sumbu X
- $P(x_p, y_p)$ adalah titik puncak dari kurva
- l adalah sumbu simetri (Ahmad Zaelani et al., 2006; Subchan et al., 2018)

3.3 Titik potong Fungsi Kuadrat

Titik potong pada persamaan fungsi kuadrat merupakan komponen yang harus diketahui. Titik potong sendiri merupakan titik perpotongan antara kurva fungsi kuadrat dengan garis sumbu X atau garis sumbu Y. Langkah-langkah menentukan titik potong pada kurva fungsi kuadrat yaitu

- a. Mencari Titik potong terhadap Sumbu X

Jika terjadi perpotongan terhadap sumbu X pada grafik fungsi kuadrat

$y = ax^2 + bx + c$ maka nilai y harus bernilai nol (0), sehingga dapat disimpulkan bahwa $y = 0$.

Apabila $y = 0$ maka apabila di substitusikan menjadi

$$ax^2 + bx + c = y$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Selesaikan persamaan tersebut dengan menggunakan pemfaktoran. Sehingga akan didapatkan nilai x_1 dan x_2 .

Titik potong yang terbentuk terhadap Sumbu X yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

b. Mencari Titik Potong terhadap Sumbu Y

Jika terjadi perpotongan terhadap sumbu Y pada grafik fungsi kuadrat maka nilai x harus bernilai nol (0), sehingga dapat disimpulkan bahwa $x = 0$.

Apabila $x = 0$ maka apabila di substitusikan menjadi

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y &= a(0)^2 + (0)x + c \\ y &= c \end{aligned}$$

Titik potong yang terbentuk terhadap Sumbu Y yaitu $(0, c)$ (Wibowo, 2012)

3.4 Titik Puncak dan Sumbu Simetri

Titik puncak pada fungsi kuadrat didapatkan dengan melakukan perubahan atau transformasi persamaan umum fungsi kuadrat menjadi bentuk baru yaitu

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

x disebut sumbu simetri (penyebab ekstrim) dan y disebut nilai optimum / nilai ekstrim

- Apabila $a > 0$ maka $y_p = y_{min}$
Artinya nilai puncak y adalah nilai paling minimum pada kurva.
- Apabila $a < 0$ maka $y_p = y_{max}$
Artinya nilai puncak y adalah nilai paling maximum pada

kurva.

Rumus untuk mencari koordinat titik puncak pada kurva

$$x_p = -\frac{b}{2a} \text{ dan } y_p = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

3.5 Diskriminan Fungsi Kuadrat

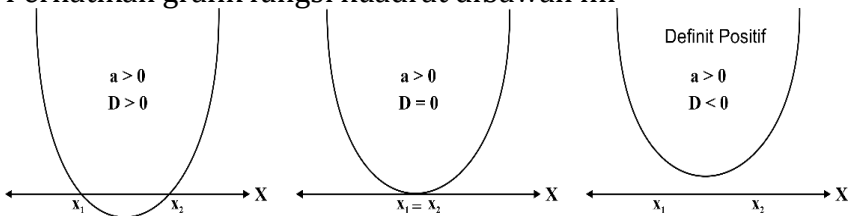
Nilai Diskriminan dari Fungsi kuadrat memuat informasi penting tentang ciri-ciri dari kurva fungsi kuadrat yang terbentuk. Diskriminan sering dilambangkan dengan notasi D , dan didefinisikan sebagai

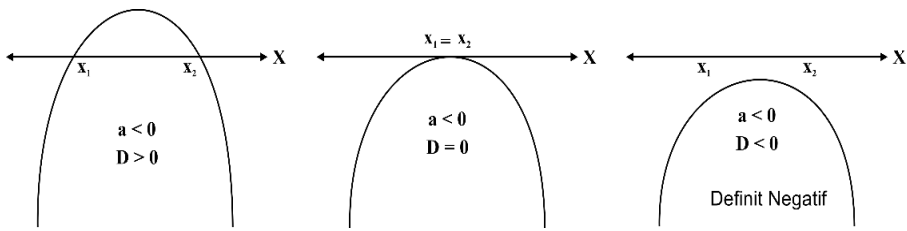
$$D = b^2 - 4ac$$

a. Hubungan Diskriminan pada grafik fungsi kuadrat dengan sumbu X

- Grafik fungsi kuadrat memotong 2 titik sumbu X (x_1 dan x_2) dengan akar-akar yang terbentuk real dan berbeda apabila nilai $D > 0$
- Grafik fungsi kuadrat menyinggung 1 titik sumbu X (x_1) dengan akar-akar yang terbentuk kembar apabila nilai $D = 0$
- Grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu X atau akar-akarnya imajiner apabila nilai $D < 0$

Perhatikan grafik fungsi kuadrat dibawah ini





Gambar 3.4 Hubungan Nilai Diskriminan pada Fungsi Kuadrat

b. Hubungan parabola dengan garis.

Hubungan yang mungkin terjadi dari suatu garis dan kurva parabola yaitu garis memotong kurva parabola di dua titik, atau garis menyinggung kurva parabola di satu titik. Langkah yang dilakukan untuk menentukan garis memotong atau menyinggung yaitu dengan mensubstitusikan persamaan garis ke dalam fungsi kuadrat. Nilai Diskriminan dapat digunakan untuk melihat hubungan yang terbentuk, yaitu

- Garis akan memotong grafik fungsi kuadrat di dua titik apabila nilai $D > 0$.
- Garis akan menyinggung grafik fungsi kuadrat di satu titik kurva apabila nilai dari $D = 0$
- Tidak terjadi perpotongan antara garis dan grafik fungsi kuadrat apabila nilai $D < 0$ (Bella & Sandy, 2021; Ahmad Zaelani et al., 2006)

3.6 Menentukan Persamaan Fungsi Kuadrat

Persamaan fungsi kuadrat dapat dengan mudah dirubah ke dalam bentuk grafik atau kurva apabila fungsi kuadrat telah diketahui sejak awal, namun bagaimana jika hanya terdapat beberapa informasi yang dimiliki dan kita harus mampu menentukan persamaan dari fungsi kuadrat tersebut. Terdapat beberapa rumus untuk mencari persamaan fungsi kuadrat, yaitu apabila :

- a. Diketahui titik puncak (x_p, y_p) dari kurva fungsi kuadrat

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

- b. Diketahui fungsi kuadrat memotong sumbu X, misal pada koordinat $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ maka

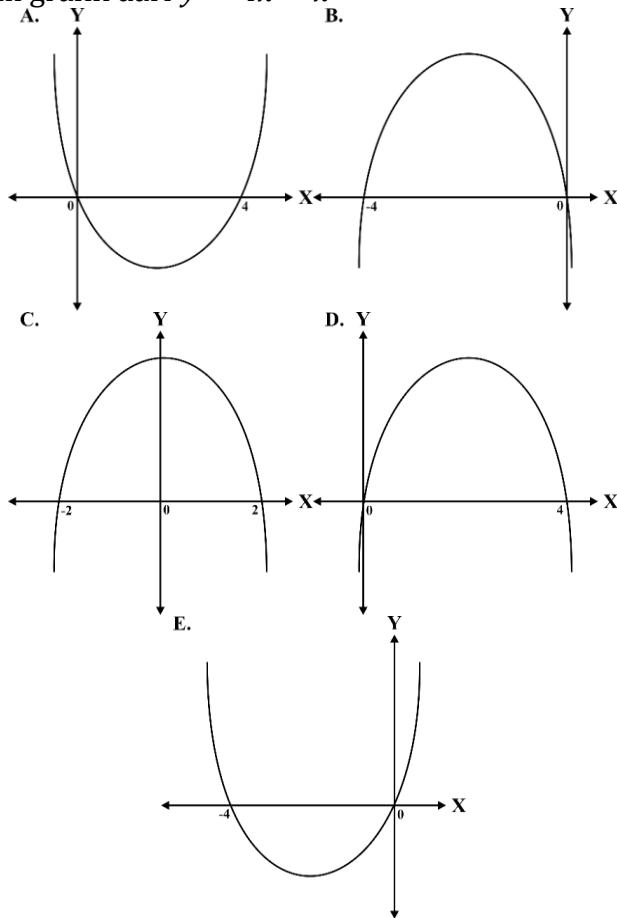
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- c. Diketahui suatu titik selain titik puncak dan perpotongan kurva fungsi kuadrat, maka gunakan rumus

$$y = ax^2 + bx + c$$

3.7 Contoh Soal

1. Tentukan grafik dari $y = 4x - x^2$



Pembahasan :

$y = 4x - x^2$ dapat ditulis dalam bentuk $y = -x^2 + 4x$.

Diketahui : $a = -1, b = 4$ dan $c = 0$

- Perhatikan bahwa nilai $a = -1 < 0$. Hal ini menyebabkan grafik akan terbuka ke bawah.
- Menentukan nilai D

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0$$

$$D = 16$$

Karena nilai $D = 16$ lebih besar dari nol, dapat disimpulkan bahwa kurva yang terbentuk akan memiliki perpotongan pada sumbu X di 2 titik koordinat.

- Titik perpotongan kurva dengan sumbu X

Diketahui bahwa $y = 0$ maka

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x(-x + 4) = 0$$

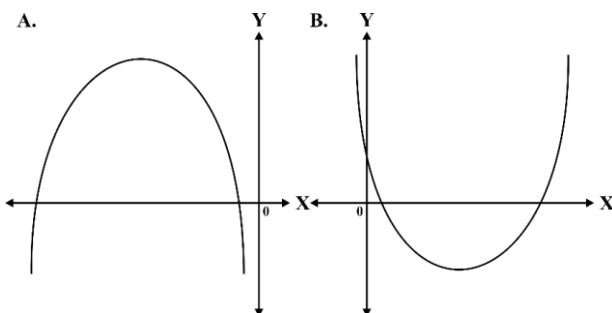
$$x = 0 \text{ atau } x = 4$$

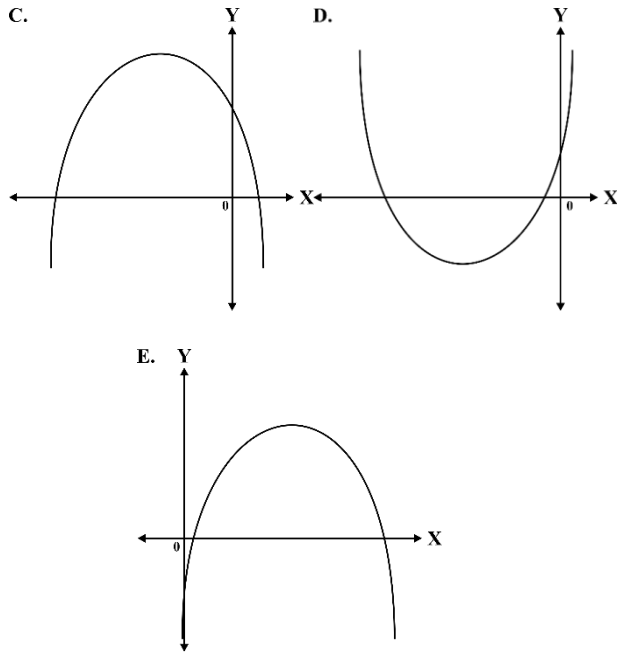
Titik potong dengan sumbu X yaitu $(0,0)$ dan $(4,0)$

Jadi grafik $y = 4x - x^2$ yang benar adalah grafik D.

Jawaban D

2. Grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ dimana memiliki nilai $a > 0, b > 0, c > 0$, dan $b^2 - 4ac > 0$ berikut ini yaitu:





Pembahasan :

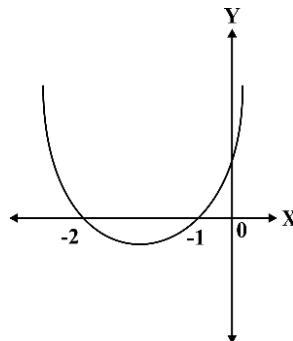
Karena $a > 0, b > 0, c > 0$ dan $b^2 - 4ac > 0$, jika dimisalkan
 $a = 1, b = 3, c = 2$

Maka :

$$y = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$x_1 = -1 \text{ dan } x_2 = -2$$

Sehingga, $a = 1 > 0$ maka kurva terbuka ke atas



Jawaban D

3. Fungsi $f(x) = ax^2 + 4x + a$ memiliki nilai tertinggi di 3. Tentukan nilai sumbu simetri fungsi.

- A. -2
- B. -1
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. 2
- E. 4

Pembahasan :

Fungsi $f(x) = ax^2 + 4x + a$

Diketahui $a = a$, $b = 4$. dan $c = a$

$$\begin{aligned}f_{maks} &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 3, \text{ syaratnya } a < 0 \\&-\frac{4^2 - 4 \cdot a \cdot a}{4a} = 3 \\&16 - 4a^2 = -12a \\&-4a^2 + 12a + 16 = 0 \\&4a^2 - 12a - 16 = 0 \\&(a + 1)(a - 4) = 0\end{aligned}$$

$$a + 1 = 0 \text{ maka } a_1 = -1$$

$$a - 4 = 0 \text{ maka } a_2 = 4 \text{ (tidak memenuhi)}$$

Maka nilai a yang mungkin adalah $a = -1$. Sehingga nilai dari sumbu simetri

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

Jawaban: D

4. Tentukan nilai e agar fungsi $f(x) = x^2 - 4x + e$ paling banyak memotong sumbu X di satu titik.

- A. $e < 4$
- B. $e \geq 4$
- C. $4 < e$
- D. $e \leq 4$

E. $e > 4$

Pembahasan:

Diketahui $f(x) = x^2 - 4x + e$

Memiliki nilai $a = 1, b = -4, c = e$ dengan syarat paling banyak memotong sumbu X di satu titik.

Maka kemungkinan yang terjadi yaitu

1. Tidak terjadi porpotongan. Sehingga $D < 0$
2. Menyinggung sumbu X. Sehingga $D = 0$

Maka dapat disimpulkan bahwa syaratnya adalah $D \leq 0$

$$D \leq 0$$

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$(-4)^2 - 4.1.e \leq 0$$

$$16 - 4e \leq 0$$

$$16 \leq 4e$$

$$\frac{16}{4} \leq e$$

$$4 \leq e$$

$$e \geq 4$$

Jawaban B

5. Garis $y = x - 2$ dan parabola $y = ax^2 + 6x + 1$ berpotongan di titik $(3,1)$ dan ...

A. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

D. $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

E. $(-3, -2)$

Pembahasan

Subtitusikan titik $(3,1)$ ke dalam persamaan parabola, sehingga

$$y = ax^2 + 6x + 1$$

$$1 = a(3)^2 + 6(3) + 1$$

$$1 = 9a + 18 + 1$$

$$1 - 19 = 9a$$

$$\begin{aligned} -18 &= 9a \\ -\frac{18}{9} &= a \\ -2 &= a \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan nilai $a = -2$, maka persamaan parabola yang terbentuk adalah $y = -2x^2 + 6x + 1$.

Selanjutnya substitusikan persamaan garis $y = x - 2$ ke persamaan parabola.

$$\begin{aligned} &(\text{Persamaan Garis}) \quad x - 2 = y = -2x^2 + 6x + 1 \quad (\text{Fungsi Kuadrat}) \\ x - 2 &= -2x^2 + 6x + 1 \quad (\text{Substitusi garis ke Fungsi Kuadrat}) \\ x - 2 + 2x^2 - 6x - 1 &= 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 &= 0 \\ (x - 3)(2x + 1) &= 0 \\ x - 3 = 0 \quad \text{atau} \quad 2x + 1 &= 0 \\ x = 3 \quad \quad \quad 2x &= -1 \\ x_1 = 3 \quad \quad \quad x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga titik potong yang lainnya adalah

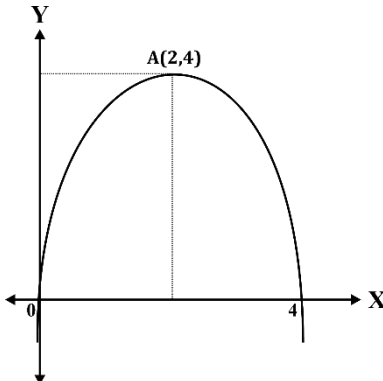
$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

Maka titik potong yang lain adalah $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Jawaban : A

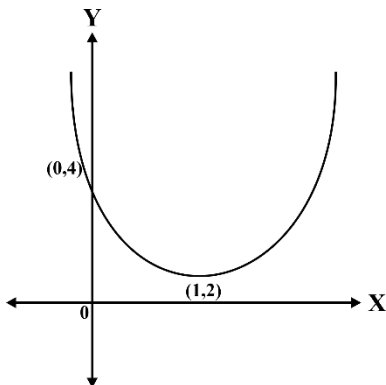
Latihan Soal

1. Tentukan apakah fungsi dibawah ini merupakan suatu fungsi kuadrat, jika iya coba tuliskan nilai dari a, b dan c.
 - $y = x^2 + 6x + 7$
 - $y = 2x^2 + 8x$
 - $y = 3x^2$
 - $y = 2x + 6$
 - $y = 13x + x^2 + 2$
 - $2y = 3x^2 + 12x$
 - $4y + 4x = 2x^2 + 4$
 - $\frac{1}{2}y = 2x^2 + 7x + 8$
 - $\frac{2}{3}y = x^2$
 - $x^2 = y + 2x$
2. Tentukan sumbu simetri dari fungsi $f(x) = 4 + 3x - x^2$
3. Jika $f(x) = x^2 + bx + c$ memiliki titik puncak di (3,2). Carilah berapa nilai b dan c yang memenuhi.
4. Suatu fungsi $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Coba ubahlah fungsi tersebut ke dalam bentuk $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{D}{-4a}$
5. Diketahui grafik $y = 2x^2 + x - 6$. Tentukan titik potong pada sumbu Y.
6. Carilah fungsi kuadrat dari gambar dibawah ini



7. Jika diketahui fungsi $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari fungsi?

8. Carilah fungsi kuadrat dari gambar dibawah ini



9. Apabila diketahui sumbu simetri = 1, melalui titik (2,5) dan (7,40). Berapakah nilai ekstrim dari fungsi kuadrat tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad Zaelani, Cucun Cunayan & Etsa Indra Irawan. 2006. *1700 bank soal pemantapan matematika untuk SMA/MA*. Bandung: Yrama Widya.
- Bella & Sandy. 2021. *Raja Bank Soal Matematika SMP Kelas 7, 8, & 9*. Jakarta: Bmedia Imprint Kawan Pustaka.
- Edo, T.K. 2023. *PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT UNTUK SMP KELAS IX*. UIN RADEN INTAN LAMPUNG.
- Subchan, Winardi, Muhammad Syifa'ul Mufid, Kistosil Fahim & Wawan Hafid Syaifudin. 2018. *Matematika Kelas IX Semester 1*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- Wibowo, S. 2012. Media Pembelajaran persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat mata pelajaran matematika kelas X. *Techno. Com*, 11(1): 28–36.

BAB 4

PERSAMAAN KUADRAT

Oleh Farida Daniel

4.1 Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel atau peubah t adalah $at^2 + bt + c = 0$ dengan a , b , dan c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Dalam persamaan ini, variabel t memiliki pangkat tertinggi 2, dimana koefisien dari t^2 adalah a , koefisien dari t adalah b dan konstanta c . Bila $a = 1$ disebut persamaan kuadrat biasa, bila $b = 0$ dinamakan persamaan kuadrat murni dan jika $c = 0$ dinamakan persamaan kuadrat tak lengkap.

Contoh:

1. Persamaan kuadrat $5t^2 - 7t + 3 = 0$ mempunyai $a = 5, b = -7, c = 3$.
2. Persamaan kuadrat $2t^2 + 8t = 0$ mempunyai $a = 2, b = 8, c = 0$.
3. Persamaan kuadrat $t^2 - 13 = 0$ dimana $a = 1, b = 0, c = -13$.

4.2 Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Suatu nilai yang dapat menggantikan t sehingga memenuhi persamaan kuadrat $at^2 + bt + c = 0$ disebut solusi atau penyelesaian atau akar persamaan tersebut yang biasanya dinotasikan sebagai t_1 dan t_2 , sehingga dapat dituliskan hubungan berikut ini:

$$at_1^2 + bt_1 + c = 0 \text{ dan } at_2^2 + bt_2 + c = 0$$

Penentuan penyelesaian persamaan kuadrat (jika ada) dapat dilakukan dengan tiga cara yaitu pemfaktoran, melengkapi bentuk kuadrat sempurna dan penerapan rumus kuadrat.

4.2.1 Pemfaktoran

Bentuk $at^2 + bt + c = 0$ diuraikan ke bentuk:

$$\frac{(at + p)(at + q)}{a} = 0$$

dimana $p \cdot q = a \cdot c$ dan $p + q = b$.

Contoh soal:

Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut ini!

a. $9t^2 - 81 = 0$

b. $t^2 - 5t + 6 = 0$

c. $5t^2 - 7t + 2 = 0$

Penyelesaian:

a. $9t^2 - 81 = 0$

$$a = 9, b = 0, c = -81.$$

$$a \cdot c = -729 = p \cdot q$$

$$b = 0 = p + q$$

Nilai p dan q yang memenuhi adalah $p = -27$ dan $q = 27$

Sehingga

$$\frac{9t^2 - 81 = 0}{(9t - 27)(9t + 27)} = 0$$

$$\frac{9(t - 3) \cdot 9(t + 3)}{9} = 0$$

$$9(t - 3)(t + 3) = 0$$

$$(t - 3)(t + 3) = \frac{0}{9} = 0$$

$$t - 3 = 0 \rightarrow t = 3$$

$$\text{atau } t + 3 = 0 \rightarrow t = -3$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = 3$ atau $t = -3$

Cara lain:

$$9t^2 - 81 = 0$$

$$9t^2 = 81$$

$$t^2 = 9$$

$$t = \sqrt{9}$$

$$t = \pm 3$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = 3$ atau $t = -3$.

b. $t^2 - 5t + 6 = 0$, berarti $a = 1, b = -5, c = 6$.

$$a \cdot c = 6 = p \cdot q$$

$$b = -5 = p + q$$

Nilai p dan q yang memenuhi adalah $p = -2$ dan $q = -3$
Sehingga

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 6 &= 0 \\ \frac{(t-2)(t-3)}{1} &= 0 \\ (t-2)(t-3) &= 0 \\ t-2 &= 0 \rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

$$\text{atau } t-3 = 0 \rightarrow t = 3$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = 2$ atau $t = 3$.

c. $5t^2 - 7t + 2 = 0$, berarti $a = 5, b = -7, c = 2$.

$$a \cdot c = 10 = p \cdot q$$

$$b = -7 = p + q$$

Nilai p dan q yang memenuhi adalah $p = -5$
dan $q = -2$
Sehingga

$$\begin{aligned} 5t^2 - 7t + 2 &= 0 \\ \frac{(5t-5)(5t-2)}{5} &= 0 \\ \frac{5(t-1) \cdot (5t-2)}{5} &= 0 \\ (t-1)(5t-2) &= 0 \\ t-1 &= 0 \rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

$$\text{atau } 5t-2 = 0 \rightarrow t = \frac{2}{5}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = 1$ atau $t = \frac{2}{5}$.

4.2.2 Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna

Mencari penyelesaian persamaan kuadrat dengan jalan memfaktorkan cukup terbatas karena seringkali sulit menemukan nilai p dan q yang memenuhi sehingga dapat digunakan cara melengkapkan bentuk kuadrat menjadi $(at + b)^2 = c$

Langkah penyelesaian dengan melengkapkan kuadrat

sempurna adalah:

- Ubah bentuk $at^2 + bt + c = 0$ ke bentuk $at^2 + bt = -c$.
- Jika $a \neq 1$, kedua ruas persamaan dibagi dengan a menjadi:

$$t^2 + \frac{b}{a}t = -\frac{c}{a}.$$

- Tambahkan $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pada kedua ruas untuk melengkapi bentuk kuadrat.
- Ruas kiri persamaan dituliskan menjadi bentuk kuadrat:

$$\left(\sqrt{t^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Gunakan sifat akar kuadrat untuk menyelesaikan bentuk (d).

Contoh soal:

Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut ini!

- $t^2 + 6t - 24 = 0$
- $2t^2 + 3t - 8 = 0$

Penyelesaian :

- $t^2 + 6t - 24 = 0$, berarti $a = 1, b = 6$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{6}{2.1}\right)^2 = 9$$

Sehingga

$$t^2 + 6t - 24 = 0$$

$$t^2 + 6t = 24$$

$$t^2 + 6t + 9 = 24 + 9$$

$$(t + 3)^2 = 33$$

$$t + 3 = \pm\sqrt{33}$$

$$t = -3 \pm \sqrt{33}$$

Jadi penyelesaiannya $t = -3 + \sqrt{33}$ atau $t = -3 - \sqrt{33}$.

- $2t^2 + 3t - 8 = 0$, berarti $a = 2, b = 3$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{3}{2.2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Sehingga

$$2t^2 + 3t - 8 = 0$$

$$t^2 + \frac{3}{2}t - 4 = 0$$

$$t^2 + \frac{3}{2}t = 4$$

$$t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{16} = 4 + \frac{9}{16}$$

$$\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{73}{16}$$

$$t + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{73}{16}}$$

$$t + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{73}}{4}$$

$$t = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{73}}{4}$$

Jadi penyelesaiannya $t = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4}$ atau $t = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4}$.

4.2.3 Menggunakan Rumus Kuadrat

Rumus kuadrat atau rumus abc adalah metode paling umum dalam menentukan penyelesaian persamaan kuadrat $at^2 + bt + c = 0$ yang didapatkan melalui proses melengkapkan kuadrat sempurna pada bentuk umum persamaan kuadrat yaitu:

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(t^2 + \frac{b}{a}t\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(t^2 + \frac{b}{a}t + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(-\frac{b^2}{4a}\right)c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dari uraian di atas dapat dituliskan rumus kuadrat:
Jika $at^2 + bt + c = 0$ dengan $a \neq 0$ maka

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh soal:

Selesaikan persamaan kuadrat berikut ini!

a. $t^2 + 5t + 4 = 0$

b. $3t^2 - 6t + 4 = 0$

Penyelesaian:

a. $t^2 + 5t + 4 = 0$, berarti $a = 1, b = 5, c = 4$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$t = \frac{-5 \pm 3}{2.1}$$

$$t = -1 \text{ atau } t = -4$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = -1$ atau $t = -4$.

b. $3t^2 - 6t + 2 = 0$, berarti $a = 3, b = -6, c = 2$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.3.2}}{2.3}$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$t = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$t = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ atau } t = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ atau $t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

4.3 Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Nilai diskriminan dari suatu persamaan kuadrat dapat menunjukkan jenis akar persamaan tersebut. Diskriminan sering dinotasikan dengan huruf D, dimana $D = b^2 - 4ac$.

- 1) Kedua akar persamaan kuadrat nyata (real) bila $D \geq 0$.
- 2) Akar-akar persamaan kuadrat nyata dan berbeda ($t_1 \neq t_2$) bila $D > 0$.
 - i. Kedua akar rasional bila $D = k^2$.
 - ii. Akar-akarnya irasional $D \neq k^2$.
k adalah bilangan bulat.
- 3) Kedua akar persamaan kuadrat nyata (real) dan sama/akar kembar ($t_1 = t_2$), serta rasional bila $D = 0$.
- 4) Kedua akar persamaan kuadrat tidak nyata (tidak real) atau imajiner bila $D < 0$.

Contoh soal:

1. Tanpa menyelesaikan persamaannya, identifikasi jenis akar dari masing-masing persamaan kuadrat di bawah ini!
 - a. $3t^2 + 12t + 9 = 0$
 - b. $t^2 - 8t + 15 = 0$
 - c. $2t^2 + 2t + 7 = 0$

Penyelesaian:

a. $3t^2 + 12t + 9 = 0$,

$$a = 3, b = 12, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac = 12^2 - 4.3.9 = 144 - 108 = 36 = 6^2$$

Nilai $D = 36 > 0$ dan $D = 6^2$ maka akar persamaan kuadrat nyata, berbeda ($t_1 \neq t_2$) dan rasional.

b. $t^2 - 10t + 25 = 0$

$$a = 1, b = -10, c = 25$$

$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4.1.25 = 100 - 100 = 0$.
 Nilai $D = 0$ berarti persamaan kuadrat memiliki akar-akar nyata dan kembar ($t_1 = t_2$) serta rasional.

c. $2t^2 + 2t + 7 = 0$

$a = 2, b = 2, c = 7$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.2.7 = 4 - 56 = -52$.

Nilai $D = -52 < 0$ maka akar persamaan kuadrat tidak nyata/imaginer.

2. Diketahui akar persamaan kuadrat $(y - 1)^2 - 4yt + 5y + 6 = 0$ adalah kembar. Tentukan nilai y .

Penyelesaian

$(y - 1)^2 - 4yt + 5y + 6 = 0$

$a = y - 1, b = -4y, c = 5y + 6$

Persamaan memiliki akar kembar jika $D = 0$

$D = b^2 - 4ac = 0$

$(-4y)^2 - 4(y - 1)(5y + 6) = 0$

$(16y^2) - 4(5y^2 + y - 6) = 0$

$(16y^2) - 20y^2 - 4y + 24 = 0$

$-4y^2 - 4y + 24 = 0$ (kedua ruas dibagi -4)

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y - 3)(y - 2) = 0$

$y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$ atau

$y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$

Jadi nilai y adalah -3 atau 2.

4.4 Jumlah Dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Jika akar-akar persamaan kuadrat $at^2 + bt + c = 0$ adalah t_1 dan t_2 maka jumlah kedua akar tersebut adalah:

$$t_1 + t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Sedangkan hasil perkalian kedua akar tersebut adalah:

$$t_1 \cdot t_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Contoh soal:

1. Hitunglah jumlah pangkat dua dari kedua akar persamaan kuadrat $3t^2 - 6t + 2 = 0$.

Penyelesaian :

$$3t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$a = 3, b = -9, c = 2$$

$$t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2$$

$$t_1^2 + t_2^2 = \left(-\frac{(-9)}{3} \right)^2 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$t_1^2 + t_2^2 = 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$$

2. Persamaan $2t^2 - 6t - s = 0$ mempunyai akar t_1 dan t_2 dimana $t_1 - t_2 = 5$. Tentukanlah nilai s yang memenuhi.

Penyelesaian:

$$2t^2 - 6t - s = 0,$$

berarti $a = 2, b = -6, c = -s$

$$t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3 \dots (1)$$

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} = \frac{-s}{2} \dots (2)$$

Diketahui

$$t_1 - t_2 = 5 \dots (3)$$

Eliminasi t_1 pada persamaan (1) dan (3)

$$\begin{array}{r} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 - t_2 = 5 \quad - \\ \hline 2t_2 = -2 \end{array}$$

$$t_2 = -1$$

Substitusi nilai $t_2 = -1$ ke persamaan (1)

$$t_1 + t_2 = 3$$

$$t_1 - 1 = 3$$

$$t_1 = 4$$

Substitusi nilai $t_1 = 4$ dan $t_2 = -1$ ke persamaan (2)

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{-s}{2}$$

$$4 \cdot (-1) = \frac{-s}{2}$$

$$-4 = \frac{-s}{2}$$

$$-s = -8$$

$$s = 8$$

Jadi nilai s adalah 8.

$$\frac{T_1 - T_2 = 5}{2t_2} = -$$

$$2t_2 = -2$$

$$T_2 = -1$$

Substitusi nilai $t_2 = -1$ ke persamaan (1)

$$T_1 + T_2 = 3T_1 - 1 = 3$$

$$T_1 = 4$$

Substitusi nilai $t_1 = 4$ dan $t_2 = -1$ ke persamaan (2)

$$T_1 \cdot T_2 = \frac{-s}{2}$$

$$4 \cdot (-1) = \frac{-s}{2}$$

$$-4 = -s = -8$$

$$s = 8$$

Jadi nilai s adalah 8. $-\frac{s}{2}$

Latihan soal

1. Apabila $t = 3$ merupakan solusi dari persamaan $3t^2 - (K - 1)t + 9 = 0$, maka tentukan nilai k .
2. Hitunglah jumlah pangkat tiga dari akar-akar persamaan $2t^2 - 5t - 4 = 0$.
3. Usia seorang anak seperempat dari usia ibunya, dan hasil kali usia mereka pada lima tahun yang lalu adalah 175. Tentukan usia mereka sekarang!
4. Tentukan nilai n jika diketahui salah satu akar persamaan $t^2 - nt + 8 = 0$ merupakan kuadrat dari akar yang lain.
5. Hitunglah nilai ac jika diketahui hasil kali kedua akar persamaan $at^2 - 5t + c = 0$ sama dengan jumlah kedua akarnya yaitu 10.
6. Sepotong kawat mempunyai panjang 60 meter, dibengkokkan menjadi segitiga siku-siku dengan ukuran sisi terpanjangnya 25 meter. Hitunglah panjang kedua sisi lainnya.
7. Jumlah kebalikan akar-akar persamaan $st^2 - (t + 6)t + 2s = 0$ adalah 2. Tentukan nilai s dan akar-akarnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Larson, r., hostetler, r. P., & falvo, d. C. (2001). Algebra and trigonometry. 5th ed. / boston, houghton mifflin co.
- Simpson, claud. (2019). Mathematics: quadratic equations and graphing: algebra. Independently published.
- Sullivan, m. (2008). Algebra and trigonometry 8th edition. Newjersey: pearson education inc.

BAB 5

PERSAMAAN LINEAR

Oleh Syahriani Sirait

5.1 Pendahuluan

Persamaan linier adalah persamaan aljabar yang setiap sukunya mengandung konstanta atau hasil kali suatu konstanta dan variabel tunggal (Taylor, 2013). Persamaan ini disebut linier karena hubungan matematis ini dapat direpresentasikan sebagai garis lurus dalam sistem koordinat Kartesius. Persamaan linier ini berbentuk: $a_1x_1 + a_2y = b$ merupakan persamaan linier yang melibatkan dua variabel, yaitu variabel x dan y (Goode & Annin, 2000).

Secara umum didefinisikan bahwa persamaan linear dapat ditulis dalam n variabel, yaitu variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, dalam bentuk berikut:

$a_1x_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \dots + a_nx_n = b$ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real.

Bentuk umum persamaan linear adalah:

$ax = c$ (1 variabel)

$ax + by = c$ (2 variabel)

$ax + by + cz =$ (3 variabel)

a, b, c adalah konstanta.

Di bawah ini contoh persamaan linear:

a. $x + 3y = 7$

b. $2x + 3y = 6$

c. $x + y = 1$

5.2 Sifat Persamaan Linear

Beberapa sifat-sifat yang ada di dalam persamaan linear, sebagai berikut:

1. Persamaan linear tetap ekuivalen jika dijumlahkan atau dikurangkan.

Penjumlahan atau pengurangan bilangan yang sama pada

kedua ruas tetap sama dengan persamaan sebelumnya.

Contoh: $2x + 3y - 4 = 0$ sama dengan $2x + 3y = 4$ karena kita menambahkan pada angka 4 di kedua sisi.

2. Persamaan linier adalah ekuivalen jika dibagi atau dikalikan. Suatu persamaan ekuivalen dengan persamaan sebelumnya jika kedua ruasnya dibagi atau dikalikan dengan bilangan yang sama.

Contoh: $2x - 4y = 8$ setara dengan $x - 2y = 4$ karena kedua ruasnya habis dibagi 2.

$2x - 4y = 8$ sama dengan $-4x + 8y = -16$ karena kedua ruas dikalikan -2.

5.3 Jenis-jenis Persamaan Linear

Berikut ini adalah jenis yang dikenal sebagai persamaan linear.

1. Persamaan linear variabel tunggal

Persamaan linier variabel tunggal adalah suatu bentuk persamaan yang memuat satu variabel saja.

Bentuk umum persamaan ini adalah: $ax + b = 0$

Catatan:

a = koefisien

b = konstanta

x = variabel

Contoh: $10x + 2 = 22$ $x = 22 - 2 = 2$

2. Persamaan linear dua variabel

Persamaan linier dua variabel adalah persamaan dengan dua variabel yang masing-masing variabel berpangkat satu.

Bentuk umum persamaan ini adalah: $ax + by = c$

Catatan:

a dan b = koefisien

x dan y = variabel

c = konstanta

Contoh:

$$2x + 4y = 12$$

$$2x + 2y = 8$$

Berapakah x dan y mempunyai nilai?

Solusi: Persamaan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi.

Opsi pertama adalah memilih salah satu persamaan.

$$2x+4y = 12$$

Sekarang pindahkan variabelnya ke sisi yang lain.

$$2x=12-4y$$

Untuk menghilangkan variabel x, bagi dengan nilai koefisien x.

$$2x/2 = 12-4y/2$$

$$x = 6 - 2y$$

Jadi, nilai sementara x adalah $6-2y$.

Kemudian masukkan ke persamaan kedua untuk mencari nilai y.

$$2x+2y = 8$$

$$2(6-2y) + 2y = 8$$

$$12-4y+2y = 8$$

$$-2y = 8-12$$

$$-2y = -4$$

Untuk menghilangkan variabel y, gunakan nilai koefisien y

$$-2y/-2 = -4/-2 \quad y = 2$$

Setelah nilai y ditemukan, masukkan ke dalam nilai x sementara.

$$x = 6-2y$$

$$x = 6-2(2)$$

$$x = 2.$$

3. Persamaan linear tiga variabel.

Persamaan linear tiga variabel adalah persamaan yang terdiri dari tiga variabel yang masing-masing variabel berpangkat 1.

Bentuk umum persamaan ini adalah: $ax + by + cz = d$

Keterangan:

a, b, c = koefisien

x dan y = variabel

d = konstanta

$$\text{Contoh: } x + y + z = 8 \quad x + 2y + 2z = 14$$

$$2x + y + 2z = 13$$

$$\text{Penyelesaian: } x + y + z = 8$$

Karena x tidak ada nilai koefisiennya, maka kita tinggal memindahkan kedua variabel tersebut ke nilai selanjutnya.

$z = 8 - x - y$ lalu masukkan persamaan salah satu ekspresi.

$x + 2y + 2(8 - x - y) = 14$
 $x + 2y + 16 - 2x - 2y = 14$
 $-x + 16 = 14$
 $-x = 14 - 16$
 $-x = -2$
 $x = 2$ setelah menemukan nilai x , masukkan nilai 2 ke persamaan lainnya untuk menentukan y .

$$3 + 2(2) + y + 2(8 - 2 - y) = 13$$

$$4 + y + 16 - 4 - 2y = 13$$

$$20 - 4 - y = 13$$

$$16 - y = 13$$

$$-y = 13$$

$$-16 - y = -3$$

$y = 3$ selanjutnya ditentukan nilai z .

Masukkan nilai x dan y ke dalam nilai z sementara.

$z = 8 - x - y$
 $z = 8 - 2 - 3$
 $z = 3$ Maka nilai $x = 2$, nilai $y = 3$, nilai $z = 3$

Contoh soal dan penyelesaian dari persamaan linear 1 variabel no 1-2

1. Diketahui keliling sawah Zul berbentuk persegi panjang 50 cm, dengan ukuran panjang $(3x+2)$ cm, dan lebar $(2x+3)$ cm, maka panjang lebar persegi panjang sebenarnya berturut-turut adalah

Jawab:

Keliling persegi panjang = $2(p+l)$

$$50 = 2(3x+2+2x+3)$$

$$50 = 2(5x+5)$$

$$25 = 5x+5$$

$$20 = 5x$$

$$x = 4$$

$$\text{Panjang} = 3x+2 = 3(5)+2 = 15+2 = 17$$

$$\text{Lebar} = 2x+3 = 2(5)+3 = 10+3 = 13$$

2. Kolam ikan Yovi berbentuk persegi panjang berukuran panjang $(3x-1)$ cm dan lebar $(2x+2)$ cm. Jika keliling persegi panjang itu 82 cm, maka panjang dan lebarnya adalah

Jawab:

$$\begin{aligned}
&\text{Keliling persegi panjang} = 2(p+l) \\
82 &= 2(3x-1+2x+2) \\
82 &= 2(5x+1) \\
41 &= 5x+1 \\
40 &= 5x \\
x &= 8 \\
\text{Panjang} &= 3x-1 = 3(5)-1 = 15-1 = 16 \\
\text{Lebar} &= 2x+2 = 2(5)+2 = 10+2 = 12
\end{aligned}$$

Contoh soal dan penyelesaian dari persamaan linear 2 variabel no 3-4

3. Fildzah membeli 8 pasang kaos kaki dan 2 hijab seharga Rp.60.000,00, sedangkan Fika membeli 3 pasang kaos kaki dan 1 hijab seharga Rp.25.000,00. Tentukan harga masing-masing sebuah kaos kaki dan sebuah hijab?

Jawab:

Misalkan: kaos kaki = x

Hijab = y

Ditanya: harga masing-masing sebuah kaos kaki dan sebuah hijab?

Penyelesaian:

$$\text{Pers 1: } 8x+2y = 60.000$$

$$\text{Pers 2: } 3x+y = 25.000$$

Menggunakan metode eliminasi untuk mencari nilai x :

$$8x+2y = 60.000 \quad |x1| \quad 8x+2y = 60.000$$

$$3x+y = 25.000 \quad |x2| \quad 6x+2y = 50.000$$

$$\begin{array}{rcl}
2x & = & 10.000 \\
x & = & 10.000/2 \\
x & = & 5.000
\end{array}$$

Substitusikan ke pers 1 untuk mencari nilai y :

$$8x+2y = 60.000$$

$$\Rightarrow 8(5.000)+2y = 60.000$$

$$\Rightarrow 40.000+2y = 60.000$$

$$\Rightarrow 2y = 60.000 - 40.000$$

$$\Rightarrow 2y = 20.000$$

$$\Rightarrow y = 20.000/2$$

$$\Rightarrow y = 10.000$$

Jadi, harga 1 pasang kaos kaki Rp.5.000,00 dan harga 1 hijab Rp.10.000,00

4. Wilda mendapatkan keuntungan Rp.700.000,00 dari hasil penjualan 30 bungkus nasi ayam bakar dan 80 cup agar-agar, Sedangkan Manda mendapatkan keuntungan Rp.200.000,00 dari hasil penjualan 10 bungkus nasi ayam bakar dan 20 cup agar-agar. Berapakah keuntungan dari hasil penjualan 10 bungkus nasi ayam bakar dan 10 cup agar-agar?

Jawab:

Misalkan: Nasi ayam bakar = x

Agar-agar = y

Ditanya: keuntungan penjualan 10 bungkus nasi ayam bakar dan 10 cup agar-agar?

Penyelesaian:

Pers 1: $30x + 80y = 700.000$

Pers 2: $10x + 20y = 200.000$

Menggunakan metode eliminasi untuk mencari y :

$30x + 80y = 700.000$ |x1| $30x + 80y = 700.000$

$10x + 20y = 200.000$ |x3| $20x + 40y = 600.000$

$$\begin{array}{r} 30x + 80y = 700.000 \\ - (20x + 40y = 600.000) \\ \hline 10y = 100.000 \end{array}$$

$$y = 5.000$$

Substitusikan ke pers 1 untuk mencari nilai x :

$30x + 80y = 700.000$

$\Rightarrow 30x + 80(5.000) = 700.000$

$\Rightarrow 30x + 400.000 = 700.000$

$\Rightarrow 30x = 700.000 - 400.000$

$\Rightarrow 30x = 300.000$

$\Rightarrow x = 300.000 / 30$

$\Rightarrow x = 10.000$

Keuntungan penjualan 10 bungkus nasi ayam bakar dan 10 cup agar-agar :

$10x + 10y = 10(10.000) + 10(5.000)$

$= 100.000 + 50.000$

$= 150.000$

Jadi keuntungannya adalah Rp.150.000,00

Contoh soal dan penyelesaian dari persamaan linear 3 variabel no 5-6

5. Manda membeli 2 buku tulis, 2 pulpen, 1 pensil seharga Rp.20.000. Harga 1 buku tulis dan 2 pensil seharga Rp.9.000, 3 pulpen dan 3 pensil seharga Rp 18.000. Jika, Manda membeli 3 buku, 2 pulpen, dan 3 pensil. Berapa harga yang harus dibayar Manda?

Jawab:

Misalkan:

Buku: x, Pulpen: y, Pensil: z

$$2x + 2y + z = 20.000.....(1)$$

$$x + 2z = 9.000.....(2)$$

$$3y + 3z = 18.000.....(3)$$

Ditanya:

Harga 3 buku, 2 pulpen, 2 pensil($3x + 2y + 2z = \dots\dots?$)

Penyelesaian:

Kita dapat melakukan penyelesaian dengan metode campuran yaitu kita dapat melakukan eliminasi x dari persamaan 1 dan 2.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y + z = 20.000. & |x1|. & 2x + 2y + z = 20.000 \\ x + 2z = 9.000. & |x2|. & x + 2z = 9. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 2x + 2y + z = 20.000 \\ - (x + 2z = 9.000) \\ \hline 2y - 3z = 2.000....(4) \end{array}$$

Kemudian jika variabel tersisa y dan z kita dapat langsung mengeliminasi z dari persamaan 3 dan 4 untuk mencari nilai y.

$$2y - 3z = 2.000$$

$$3y + 3z = 18.000$$

$$\begin{array}{r} \hline 2y - 3z = 2.000 \\ + (3y + 3z = 18.000) \\ \hline 5y = 20.000 \\ y = 20.000/5 \\ y = 4.000 \end{array}$$

Setelah mengetahui nilai y, lakukan substitusi nilai y ke persamaan 3 untuk mencari nilai z.

$$3y + 3z = 18.000....(3)$$

$$3(4.000) + 3z = 18.000$$

$$12.000 + 3z = 18.000$$

$$3z = 18.000$$

$$3z = 6.000$$

$$z = 6.000/3$$

$$z = 2.000$$

Dan lakukan substitusi nilai z ke persamaan 2 untuk mencari nilai x .

$$x + 2z = 9.000 \dots (2)$$

$$x + 2(2.000) = 9.000$$

$$x + 4.000 = 9.000$$

$$x = 9.000 - 4.000$$

$$x = 5.000$$

Setelah mengetahui harga masing-masing mari kita selesaikan pertanyaannya, yaitu harga

3 buku tulis, 2 pulpen, 2 pensil ($3x + 2y + 2z$) =?

$$3x + 2y + 2z = \dots?$$

$$3(5.000) + 2(4.000) + 2(2.000) = \dots$$

$$15.000 + 8.000 + 4.000 = \text{Rp. } 27.000$$

Jadi harga 3 buku tulis, 2 pulpen, dan 2 pensil yaitu Rp. 27.000

6. Arfika mempunyai pita hias berwarna merah, kuning, dan hijau. Jumlah panjang ketiga pita hias tersebut 250 cm. Panjang pita kuning 5 cm kurang dari panjang pita hijau. Panjang pita hijau 15 cm lebih dari panjang pita merah. Jika pita hijau digunakan 30 cm, panjang sisa pita kuning adalah...

Jawab:

Misalkan:

Merah: a , Kuning: b , dan Hijau: c

$$a + b + c = 250 \dots (1)$$

$$b = c - 5 \dots (2)$$

$$c = a + 15 \dots (3)$$

Ditanya: Panjang sisa pita hijau jika digunakan 30 cm ($c - 30 = \dots?$)

Penyelesaian:

Dari persamaan tersebut kita dapat langsung mengetahui penyelesaian dari persamaan linear tiga variabel tersebut dengan menggunakan metode substitusi, namun kita terlebih dahulu mengubah persamaan 3.

$$c = a + 15$$

$$a = c - 15 \dots (4)$$

Substitusikan persamaan 2 dan 4 ke persamaan 1 untuk mengetahui nilai c.

$$a+b+c = 250$$

$$(c - 15) + (c - 5) + c = 250$$

$$c+c+c-15-5 = 250$$

$$3c-20 = 250$$

$$3c = 250 + 20$$

$$3c = 250+20$$

$$c = 270/3$$

$$c = 90$$

Panjang pita hijau = 90 cm maka bila digunakan 30cm yaitu:

$$c-30 = \dots?$$

$$(90) - 30 = 60$$

Jadi panjang sisa pita hijau yaitu sepanjang 60cm.

Latihan Soal

- Carilah nilai x dari persamaan linear dibawah ini!
 - $3x + 6 = 15$
 - $4x - x = 12 - x$
- Diketahui pada persamaan
 $2x + 4y = 20$ dan $4x - 3y = 18$
 maka carilah nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut!
- Pak Slamet adalah seorang agen sayuran, sekarang ini sedang mencari terong dan kacang panjang. Kemudian pak Slamet membeli 5 kg terong dan 7 kg kacang panjang dengan harga Rp 55.000,00 ditempat ibu Dewi, lalu pak Slamet membeli lagi 10 kg terong dan 10 kg kacang panjang dengan harga Rp 90.000,00 ditempat ibu Ita. Jika pak Slamet membeli 3kg terong dan 5 kg kacang panjang di tempat ibuk Dewi berapakah yang harus di bayar pak Slamet!
- Carilah penyelesaian dari persamaan linear tiga variabel berikut ini!

$$r + s + t = -5$$

$$r + s - 3t = 7$$

$$r - 3s + t = 19$$

DAFTAR PUSTAKA

- Goode, S. W., & Annin, S. (2000). *Differential equations and linear algebra*. Prentice Hall Upper Saddle River.
- Taylor, M. (2013). *Partial differential equations II: Qualitative studies of linear equations* (Vol. 116). Springer Science & Business Media.
- Sri Wahyuni, 2019. Sistem persamaan linear. <https://id.scribd.com/>, diakses 31 Oktober 2019
- Ragam info, 2023. Sifat-sifat persamaan linear beserta contohnya. <https://kumparan.com/>, diakses 11 September 2023
- Sampoernaacademy, 2022. Persamaan linear, sifat, jenis <https://www.sampoernaacademy.sch.id/id/>, diakses: 14 Maret 2022

BAB 6

PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Oleh Nurul Ainun Fajriah

6.1 Pendahuluan

Pertidaksamaan adalah bentuk aljabar yang dipisahkan dengan tandah $>$, $<$, $\leq$, atau $\geq$ (Indrianti, 2018). Berikut beberapa contoh pertidaksamaan.

- a. $3x + 5 < 10$
- b. $2x - 6 > 7$
- c. $x + 9 \geq 3$
- d. $x \leq 6$

Jika a dan b adalah bilangan real, $a < b$ (dibaca a kurang dari b) didefinisikan bahwa $b - a$ adalah positif. Definisi ini dan tiga sifat berikut dapat digunakan untuk membuktikan sifat dasar pertidaksamaan (Hillman and Alexanderson, 1966).

6.1.1 Tertutup pada bilangan positif

Jika a dan b adalah bilangan positif, maka $a + b$ dan ab adalah bilangan positif.

6.1.2 Trikotomi

Satu dan hanya satu dari pernyataan berikut ini yang benar untuk a bilangan real: (a) a adalah nol, (b) a adalah positif, dan (c) a adalah negatif.

6.1.3 Akar

Jika p adalah bilangan positif dan n adalah bilangan bulat positif, maka terdapat satu bilangan positif r sehingga $r^n = p$.

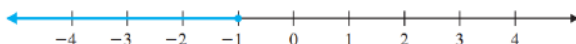
6.2 Pertidaksamaan Linear Satu

Pertidaksamaan linear satu variabel dapat dituliskan dalam bentuk $ax + b < c$, $ax + b \leq c$, $ax + b > c$, atau $ax + b \geq c$, di mana a, b , dan c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Penyelesaian pertidaksamaan linear adalah himpunan bilangan yang dapat direpresentasikan dengan salah satu dari tiga cara, yaitu dalam bentuk grafik, dalam notasi himpunan, dan dalam notasi interval (Messersmith, Perez and Feldman, 2014). Berikut contoh penyelesaian pertidaksamaan linear dengan tiga cara:

$$x \leq -1$$

Penyelesaian dalam bentuk grafik



Penyelesaian dalam notasi himpunan dapat dituliskan dengan $\{x|x \leq -1\}$ dan dalam notasi interval dituliskan dengan $(-\infty, -1]$.

6.3 Penyelesaian Pertidaksamaan Linear dengan Sifat Operasi Bilangan

Berikut beberapa penyelesaian pertidaksamaan (Messersmith, Perez and Feldman, 2014).

6.3.1 Sifat Penjumlahan dan Pengurangan

Jika a, b , dan c bilangan real, maka

1. $a < b$ dan $a + c < b + c$ adalah ekuivalen
2. $a < b$ dan $a - c < b - c$ adalah ekuivalen

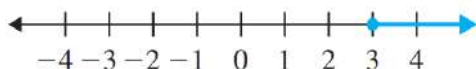
Menambahkan angka yang sama pada kedua sisi pertidaksamaan atau mengurangi angka yang sama pada kedua sisi pertidaksamaan tidak akan mengubah solusi pertidaksamaan.

Contoh. Selesaikan $y - 8 \geq -5$

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} y - 8 + 8 &\geq -5 + 8 \\ y &\geq 3 \end{aligned}$$

Solusi dalam notasi interval yaitu $[3, \infty)$, dalam notasi himpunan yaitu $\{y|y \geq 3\}$, dan dalam grafik seperti berikut.



6.3.2 Sifat Perkalian

Dalam operasi penjumlahan dan pengurangan untuk menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan digunakan cara yang sama, tetapi dalam perkalian dan pembagian hal ini tidak berlaku. Perhatikan contoh berikut.

Diketahui bahwa $2 < 5$, masing-masing sisi dikalikan dengan bilangan positif 3

$$2 < 5 \quad (\text{benar})$$

$$3(2) < 3(5) \quad (\text{benar})$$

$$6 < 15 \quad (\text{benar})$$

Kemudian masing-masing sisi dikali dengan bilangan negatif 3

$$2 < 5 \quad (\text{benar})$$

$$-3(2) < -3(5) \quad (\text{benar})$$

$$-6 < -15 \quad (\text{salah})$$

Untuk membuat pernyataan tersebut benar, maka simbol pertidaksamaan harus dibalik

$$-6 > -15 \quad (\text{salah})$$

Misalkan a , b , dan c adalah bilangan real.

1. Jika c bilangan positif, maka $a < b$ dan $ac < bc$ adalah pertidaksamaan ekuivalen dan memiliki Solusi yang sama
2. Jika c bilangan negatif, maka $a < b$ dan $ac > bc$ adalah pertidaksamaan ekuivalen dan memiliki Solusi yang sama

Juga berlaku jika $c > 0$ dan $a < b$, maka $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. Jika $c < 0$ dan $a < b$, maka $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Contoh.

Selesaikan pertidaksamaan berikut.

1. $-5w \leq 20$

2. $5w \leq -20$

Penyelesaian

1. $-5w \leq 20$

$-5w \leq 20$

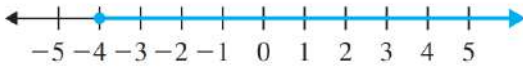
$$\frac{-5w}{-5} \geq \frac{20}{-5} \quad (\text{bagi dengan } -5 \text{ dan mengganti simbol pertidaksamaan})$$

$$w \geq -4$$

Notasi interval: $[-4, \infty)$

Notasi himpunan: $\{w | w \geq -4\}$

Dalam grafik:



2. $5w \leq -20$

$$5w \leq -20$$

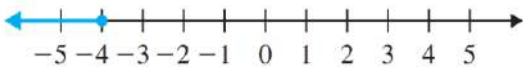
$$\frac{5w}{5} \leq \frac{-20}{5} \quad (\text{bagi dengan } 5 \text{ dan tidak mengganti simbol pertidaksamaan})$$

$$w \leq -4$$

Notasi interval: $(-\infty, 4]$

Notasi himpunan: $\{w | w \leq -4\}$

Dalam grafik:



6.3.3 Kombinasi Sifat

Contoh. Tentukan penyelesaian dari $4(5 - 2d) + 11 < 2(d + 3)$

Penyelesaian.

$$4(5 - 2d) + 11 < 2(d + 3)$$

$$20 - 8d + 11 < 2d + 6 \quad (\text{Distribusi})$$

$$31 - 8d < 2d + 6 \quad (\text{Operasikan bilangan sejenis})$$

$$31 - 8d - 2d < 2d - 2d + 6 \quad (\text{Kurangi setiap sisi dengan } 2d)$$

$$31 - 10d < 6$$

$$31 - 31 - 10d < 6 - 31 \quad (\text{Kurangi setiap sisi dengan } 31)$$

$$-10d < -25$$

$$\frac{-10d}{-10} > \frac{-25}{-10}$$

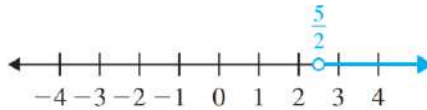
(bagi setiap sisi dengan -10 dan ubah simbol pertidaksamaan)

$$d > \frac{5}{2}$$

Notasi interval: $(\frac{5}{2}, \infty)$

Notasi himpunan: $\{d | d > \frac{5}{2}\}$

Dalam grafik:



6.3.4 Pertidaksamaan Majemuk dengan Tiga Bagian

Pertidaksamaan majemuk mengandung lebih dari satu simbol pertidaksamaan. Berikut beberapa contoh pertidaksamaan majemuk.

$$-5 < b + 4 < 1, t \leq \frac{1}{2} \text{ atau } t \geq 3, \text{ dan } 2z + 9 < 5 \text{ dan } z - 1 > 6.$$

Contoh.

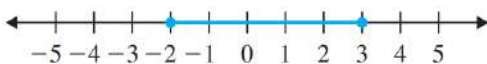
1. Selesaikan pertidaksamaan $-2 \leq x \leq 3$

Penyelesaian

Perhatikan pertidaksamaan $-2 \leq x \leq 3$, pertidaksamaan tersebut dapat diselesaikan dengan dua cara,

- a. x di antara -2 dan 3 dan -2 dan 3 termasuk dalam interval, atau
- b. Memecah $-2 \leq x \leq 3$ menjadi dua pertidaksamaan $-2 \leq x$ dan $x \leq 3$.

Dengan cara pertama diketahui batas bawah pada garis bilangan adalah -2 (termasuk -2) dan batas atasnya 3 (termasuk 3), sehingga dapat dituliskan dengan notasi interval dengan $[-2, 3]$ dan notasi himpunan dengan $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$. Dalam grafik sebagai berikut.



2. Selesaikan pertidaksamaan $-\frac{7}{3} < \frac{1}{2}y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$

Penyelesaian

$$-\frac{7}{3} < \frac{1}{2}y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$$

$$6\left(-\frac{7}{3}\right) < 6\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}\right) \leq 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

mengalikan setiap bagian pertidaksamaan dengan 6)

$$-14 < 3y - 2 \leq 3$$

$$-14 + 2 < 3y - 2 + 2 \leq 3 + 2$$

membambahkan 2 pada setiap bagian)

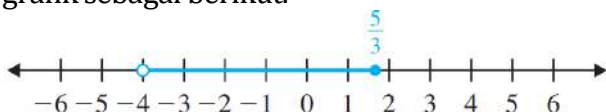
$$-12 < 3y \leq 5$$

$$-\frac{12}{3} < \frac{3y}{3} \leq \frac{5}{3}$$

membagi setiap bagian dengan 3)

$$-4 < y \leq \frac{5}{3}$$

Sehingga penyelesaian dapat dituliskan dalam notasi himpunan dengan $\{y | -4 < y \leq \frac{5}{3}\}$, notasi interval dengan $(-4, \frac{5}{3}]$, dan dalam grafik sebagai berikut.



3. Selesaikan pertidaksamaan $11 < -3x + 2 < 17$

Penyelesaian

$$11 < -3x + 2 < 17$$

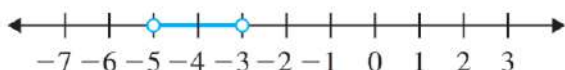
$$11 - 2 < -3x + 2 - 2 < 17 - 2 \quad \text{(kurangi setiap bagian pertidaksamaan dengan 2)}$$

$$9 < -3x < 15$$

$$\frac{9}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3} \quad \text{(kalikan setiap bagian pertidaksamaan dengan bilangan negatif, maka simbol pertidaksamaan diubah)}$$

$$-3 > x > -5$$

Sehingga penyelesaian dapat dituliskan dalam notasi himpunan dengan $\{x | -5 < x < -3\}$, notasi interval dengan $(-5, -3)$, dan dalam grafik sebagai berikut.



6.4 Penyelesaian Masalah Pertidaksamaan Linear

6.4.1 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk yang

Mengandung Kata 'Dan'

Selesaikan pertidaksamaan $c + 5 \geq 3$ dan $8c \leq 32$

Penyelesaian

Langkah 1.

Identifikasi pertidaksamaan “dan” atau “atau” dan pahami maknanya. Kedua pertidaksamaan yang dihubungkan dengan “dan” berarti solusi yang merupakan nilai c memenuhi kedua pertidaksamaan tersebut.

Langkah 2.

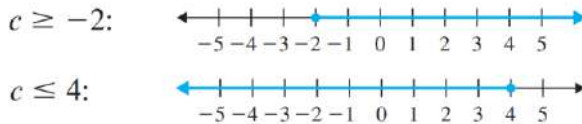
Selesaikan setiap pertidaksamaan secara terpisah

$$c + 5 \geq 3 \quad \text{dan} \quad 8c \leq 32$$

$$c \geq -2 \quad \text{dan} \quad c \leq 4$$

Langkah 3.

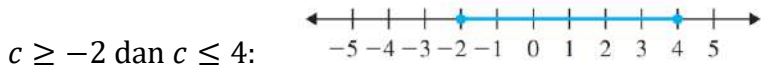
Membuat grafik himpunan solusi untuk setiap pertidaksamaan pada garis bilangan untuk membantu memvisualisasikan himpunan solusi pertidaksamaan majemuk.



Langkah 4.

Perhatikan garis bilangan dan pikirkan di mana grafik penyelesaian pertidaksamaan majemuk tersebut. Pertidaksamaan tersebut menggunakan kata “dan” sehingga solusinya harus memenuhi kedua pertidaksamaan.

Jika kita mengambil garis bilangan yang merepresentasikan $c \geq -2$ dan meletakkannya di atas garis bilangan yang merepresentasikan $c \leq 4$, daerah manakah yang akan berpotongan?



Pertidaksamaan tersebut berpotongan antara -2 dan 4, dan termasuk kedua titik tersebut.

Langkah 5.

Tuliskan jawaban dalam interval notasi.

Ilustrasi garis bilangan terakhir menunjukkan bahwa solusi untuk pertidaksamaan $c + 5 \geq 3$ dan $8c \leq 32$ adalah $[-2, 4]$.

6.4.2 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk yang Mengandung Kata ‘Atau’

Selesaikan pertidaksamaan majemuk $6p + 5 \leq -1$ atau $p - 3 \geq 1$

Penyelesaian

Langkah 1.

Kedua pertidaksamaan tersebut digabungkan dengan kata “atau” sehingga solusinya berupa nilai p yang berada pada himpunan solusi $6p + 5 \leq -1$ atau pada himpunan solusi $p - 3 \geq 1$.

Langkah 2.

Selesaikan setiap pertidaksamaan secara terpisah

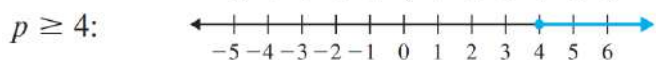
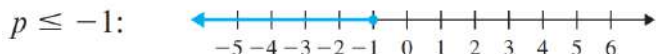
$$6p + 5 \leq -1 \quad \text{atau} \quad p - 3 \geq 1$$

$$6p \leq -6$$

$$p \leq -1 \quad \text{atau} \quad p \geq 4$$

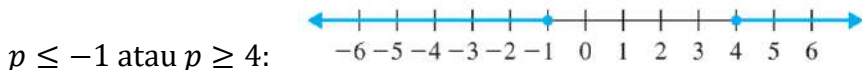
Langkah 3.

Membuat grafik himpunan solusi secara terpisah sehingga lebih mudah untuk menemukan gabungan himpunan tersebut.



Langkah 4.

Solusi dari pertidaksamaan majemuk $6p + 5 \leq -1$ atau $p - 3 \geq 1$ terdiri dari bilangan yang merupakan solusi pertidaksamaan pertama atau pertidaksamaan kedua, atau keduanya. Kita dapat memvisualisasikannya dengan cara meletakkan garis bilangan di atas satu sama lain, solusi dari pertidaksamaan majemuk tersebut adalah total (gabungan) dari yang diarsir.



Langkah 5.

Solusi di atas dapat dituliskan dengan $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

6.4.3 Penyelesaian Pertidaksamaan Majemuk Khusus

Selesaikan pertidaksamaan majemuk berikut.

1. $k - 5 < -2$ atau $4k + 9 > 6$

2. $\frac{1}{2}w \geq 3$ dan $1 - w \geq 0$

Penyelesaian

1. $k - 5 < -2$ atau $4k + 9 > 6$

Langkah 1.

Solusi untuk pertidaksamaan “atau” adalah gabungan dari $k - 5 < -2$ dan $4k + 9 > 6$

Langkah 2.

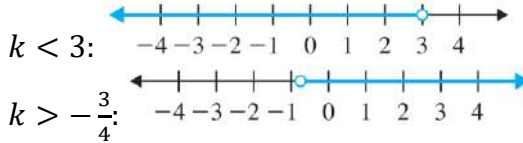
Selesaikan pertidaksamaan secara terpisah

$$k - 5 < -2 \quad \text{atau} \quad 4k + 9 > 6$$

$$4k > -3$$

$$k < 3 \quad \text{atau} \quad k > -\frac{3}{4}$$

Langkah 3.



Langkah 4.

$$k < 3 \text{ atau } k > -\frac{3}{4} : \quad \text{---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|}$$

Jika garis bilangan pada langkah 3 diletakkan di atas satu sama lain, gabungan dari arsiran adalah seluruh garis bilangan.

Langkah 5.

Solusi dari pertidaksamaan majemuk tersebut adalah $(-\infty, \infty)$.

2. $\frac{1}{2}w \geq 3$ dan $1 - w \geq 0$

Langkah 1.

Solusi pertidaksamaan “dan” adalah perpotongan dari solusi

$$\frac{1}{2}w \geq 3 \text{ dan } 1 - w \geq 0$$

Langkah 2.

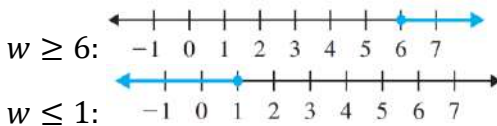
Selesaikan setiap pertidaksamaan secara terpisah

$$\frac{1}{2}w \geq 3 \quad \text{dan} \quad 1 - w \geq 0$$

$$1 \geq w$$

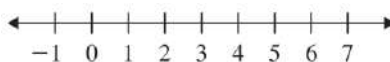
$$w \geq 6 \quad \text{dan} \quad w \leq 1$$

Langkah 3.



Langkah 4.

$$w \geq 6 \text{ dan } w \geq 2:$$



Langkah 5.

$$\text{Solusi } \frac{1}{2}w \geq 3 \text{ dan } 1 - w \geq 0 \text{ adalah } \emptyset.$$

DAFTAR PUSTAKA

- Hillman, A.P. and Alexanderson, G.L. (1966) *Algebra Through Problem Solving*. United States of America: Allyn and Bacon, Inc.
- Indrianti, M. (2018) *Ayo, Belajar Persamaan, Pertidaksamaan, dan Sistem Persamaan Linear!* Jakarta: PT Sunda Kelapa Pustaka.
- Messersmith, S., Perez, L. and Feldman, R.S. (2014) *Intermediate Algebra with Power Learning*. New York: Mc Graw-Hill.

BAB 7

PROGRAM LINEAR

Oleh Vini Rizqi

7.1 Pendahuluan

Program linear merupakan salahsatu teknik dalam matematika yang digunakan untuk memecahkan masalah optimasi linear (nilai maksimum dan nilai minimum) dengan menggunakan konsep pertidaksamaan linear.

Permasalahan dasar yang perlu dikuasai sebelum menggunakan teknik program linear adalah menterjemahkan suatu permasalahan kedalam model matematika. Oleh karenanya program linear merupakan teknik matematika yang digunakan untuk memilih program terbaik dari alternatif yang mungkin dengan menggunakan fungsi linear (Zulyadaini, 2017).

Program linear digunakan dalam memecahkan permasalahan sehari-hari yang erat kaitannya dengan dunia ekonomi. Misalkan saja untuk menentukan kebijakan produksi suatu barang untuk memenuhi permintaan pasar dengan tujuan agar mendapatkan keuntungan yang maksimum. Setelah mengetahui rungsi tujuan memaksimumkan dapat pula menentukan kebijakan produksi apa yang harus diambil.

7.2 Sistem Pertidaksamaan Linear

Salahsatu pemodelan matematika yang digunakan dalam program linear adalah pemodelan dengan pertidaksamaan. Pertidaksamaan merupakan suatu kalinat matematika yang memuat tanda ketidaksamaan ($<$, $>$, $\leq$, dan $\geq$). Jika tanda pertidaksamaan disandingkan dengan fungsi linear yaitu fungsi yang memuat satu variabel, maka disebut pertidaksamaan linear, misalkan $2x > 10$ dan $2y \leq 6$.

Sedangkan tanda pertidaksamaan yang disandingkan dengan fungsi yang memuat dua variabel, maka disebut pertidaksamaan linear dua variabel, misalkan $2x + y \geq 6$ dan

$$x - 8y < 10.$$

7.2.1 Himpunan penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Himpunan penyelesaian merupakan himpunan semua angka yang memenuhi suatu persamaan. Perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut:

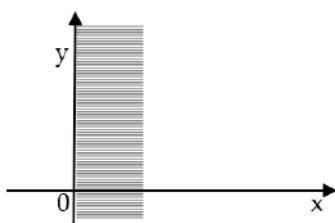
- | | | |
|---------------|----------------|-----------------------|
| a. $x \geq 0$ | c. $x < 3$ | e. $-1 \leq x \leq 3$ |
| b. $y \geq 0$ | d. $x \geq -2$ | f. $1 < y \leq 4$ |

Jawab:

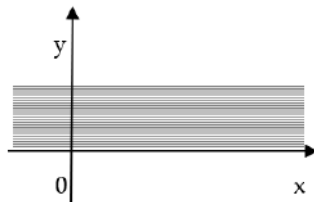
- $x \geq 0$, artinya nilai x lebih besar atau samadengan 0, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Pada gambar, daerah himpunan penyelesaian $x \geq 0$ adalah daerah yang diarsir yaitu sebelah kanan sumbu x . Ditunjukkan pada gambar 7.1a.
- $y \geq 0$, artinya nilai y lebih besar atau samadengan 0, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Pada gambar, daerah himpunan penyelesaian $y \geq 0$ adalah daerah yang diarsir yaitu sebelah atas sumbu x . Ditunjukkan pada gambar 7.1b.
- $x < 3$, artinya nilai x adalah angka yang lebih kecil dari 3 yaitu $\{2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$. Daerah himpunan penyelesaian $x < 3$ ditunjukkan pada gambar 7.1c.
- $x \geq -2$, artinya nilai x lebih besar atau samadengan -2 yaitu $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Daerah himpunan penyelesaian $x \geq -2$ ditunjukkan pada gambar 7.1d.
- $-1 \leq x \leq 3$, artinya nilai x berada diantara 1 dan 3 dengan nilai -1 dan 3 masuk ke dalam daerah himpunan penyelesaian, yaitu $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Daerah himpunan penyelesaian $-1 \leq x \leq 3$ ditunjukkan pada gambar 7.1e.
- $1 < y \leq 4$, artinya nilai y berada diantara 1 dan 3 dengan nilai 3 masuk ke dalam daerah himpunan penyelesaian,

yaitu $\{2, 3, 4\}$. Himpunan penyelesaian $1 < y \leq 4$ ditunjukkan pada gambar 7.1.f.

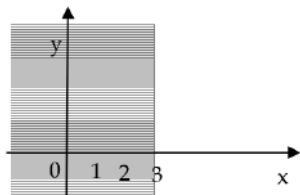
Gambar himpunan penyelesaian;



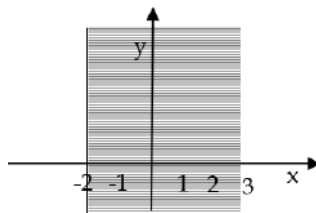
(a)



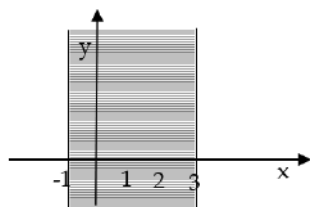
(b)



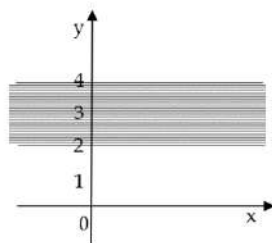
(c)



(d)



(e)



(f)

Gambar 7.1. Himpunan daerah penyelesaian

7.2.2 Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa pertidaksamaan dua variabel memuat fungsi yang didalamnya dua variabel bebas. Terdapat beberapa langkah untuk memudahkan menentukan

himpunan penyelesaian pertidaksamaan dua variabel:

1. Gambar garis persamaan dua variabel $ax + by = c$,
2. Ambil sembarang titik $Q(x_1, y_1)$ yang berada di luar garis $ax + by = c$,
3. Substitusikan titik tersebut ke dalam persamaan,
4. Jika persamaan menjadi benar, maka daerah yang memuat titik Q adalah himpunan penyelesaian. Sebaliknya jika persamaan menjadi salah, maka daerah himpunan penyelesaian tidak memuat titik Q.

Contoh 2. Tentukan daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan $3x + 8y \leq 24$ untuk $x, y \in \mathbf{R}$.

Jawab:

Gambar garis $3x + 8y = 24$, dengan metode titik potong.

• Titik potong sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$3x + 8y = 24 \rightarrow 3x + 8(0) = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Titik potong sumbu $x \rightarrow (8,0)$

• Titik potong sumbu $y \rightarrow x = 0$

$$3x + 8y = 24 \rightarrow 3(0) + 8y = 24$$

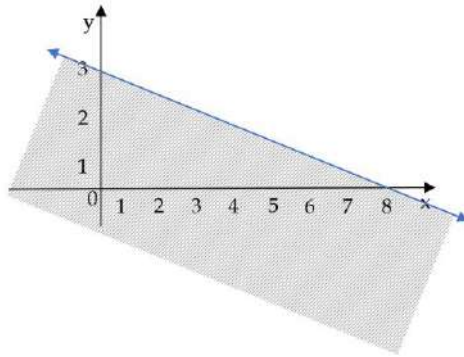
$$8y = 24$$

$$y = \frac{24}{8} = 3$$

Titik potong sumbu $y \rightarrow (0,3)$

Ambil titik sembarang misalkan $(0,0)$, maka pertidaksamaan menjadi $3(0) + 8(0) \leq 24$. Pernyataan $0 \leq 24$ adalah benar, maka daerah himpunan penyelesaian memuat titik $(0,0)$.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 7.2. Himpunan penyelesaian $3x + 8y \leq 24$

7.3 Nilai Optimum Sistem Pertidaksamaan Linear

Secara garis besar, untuk menentukan nilai optimasi dengan menggunakan program linear terdapat dua macam fungsi yaitu fungsi objektif (fungsi tujuan) dan fungsi kendala.

Fungsi objektif merupakan fungsi yang akan dioptimalkan nilainya. Fungsi ini dapat bernilai maksimum atau pun minimum tergantung pada persoalannya. Bentuk umum fungsi objektif merupakan bentuk umum persamaan fungsi linear dua variabel.

Sedangkan fungsi kendala merupakan batasan-batasan yang harus dipenuhi oleh fungsi objektif. Bentuk umum dari fungsi kendala adalah pertidaksamaan linear dua variabel.

7.3.1 Metode Uji Titik Pojok

Setiap himpunan penyelesaian dari fungsi objektif akan memuat nilai maksimum atau minimum di titik pojoknya. Untuk menyelidikidi hal tersebut salahsatu metode yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan uji titik pojok.

Misalkan diketahui fungsi objektif $f = ax + by$, nilai optimum ditentukan dengan menghitung nilai f dari setiap titik pojok pada daerah himpunan penyelesaian.

- Nilai optimum maksimum adalah nilai terbesar f dari semua titik pojok.
- Nilai optimum minimum adalah nilai tekecil f dari semua titik pojok.

Contoh 3. Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif

$f = 3x + 2y$ dengan fungsi kendala;

$$5x + 2y \leq 30$$

$$x + 2y \leq 10$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0$$

Jawab:

gambar himpunan penyelesaian dari setiap fungsi kendala.

persamaan $5x + 2y = 30$

Titik potong sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$5x + 2y = 30 \rightarrow 5x + 2(0) = 30$$

$$5x = 30$$

$$x = \frac{30}{5} = 6$$

Titik potong sumbu $x \rightarrow (6,0)$

Titik potong sumbu $y \rightarrow x = 0$

$$5x + 2y = 30 \rightarrow 5(0) + 2y = 30$$

$$2y = 30$$

$$y = \frac{30}{2} = 15$$

Titik potong sumbu $y \rightarrow (0,15)$

Ambil titik sembarang misalkan $(0,0)$, maka pertidaksamaan menjadi $5(0) + 2(0) \leq 30$. Pernyataan $0 \leq 30$ adalah benar, maka daerah himpunan penyelesaian memuat titik $(0,0)$. Maka garis $5x + 2y \leq 30$ di tandai dengan arsiran ke bawah mengenai titik $(0,0)$.

persamaan $x + 2y = 10$

Titik potong sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$x + 2y = 10 \rightarrow x + 2(0) = 10$$

$$x = 10$$

Titik potong sumbu $x \rightarrow (10,0)$

Titik potong sumbu $y \rightarrow x = 0$

$$x + 2y = 10 \rightarrow (0) + 2y = 10$$

$$2y = 10$$

$$y = \frac{10}{2} = 5$$

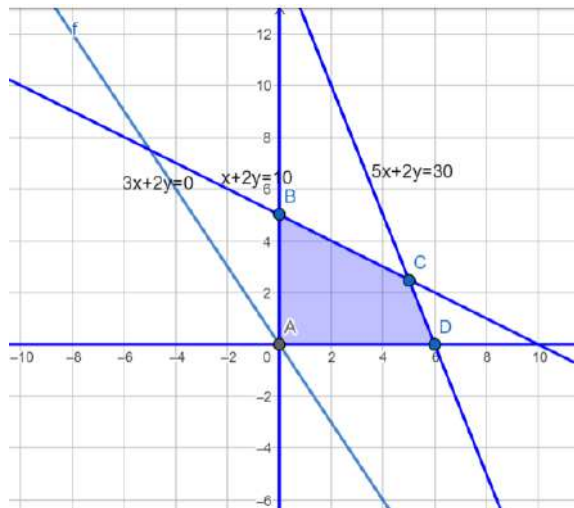
Titik potong sumbu $y \rightarrow (0,5)$

Ambil titik sembarang misalkan $(0,0)$, maka pertidaksamaan menjadi $(0) + 2(0) \leq 10$. Pernyataan $0 \leq 10$ adalah benar, maka daerah himpunan penyelesaian memuat

titik $(0,0)$. Maka garis $x + 2y \leq 10$ di tandai dengan arsiran ke bawah mengenai titik $(0,0)$.

- Persamaan $x \geq 0$, memuat semua nilai yang lebih besar atau samadengan 0 sehingga ditandai dengan arsiran ke atas pada sumbu x .
- Persamaan $y \geq 0$, memuat semua nilai yang lebih besar atau samadengan 0 sehingga ditandai dengan arsiran ke kanan pada sumbu y .

Himpunan penyelesaian merupakan daerah yang terarsir paling banyak. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 7.3. Himpunan penyelesaian dengan geogebra

Selanjutnya menentukan semua titik potong potong (titik pojok) dari himpunan penyelesaian.

- **Titik A(0, 0)**
- Titik B → perpotongan $x + 2y = 10$ dengan $y = 0$

$$x + 2y = 10 \rightarrow x + 2(0) = 10$$

$$x = 10$$

Titik B(10, 0)

- Titik C → perpotongan garis $5x + 2y = 30$ dengan $x + 2y = 10$

$$\begin{aligned}
 5x + 2y &= 30 \\
 x + 2y &= 10 \quad - \\
 \hline
 5x - x &= 30 - 10 \\
 4x &= 20 \\
 x &= \frac{20}{4} = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + 2y &= 10 \\
 5 + 2y &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2y &= 10 - 5 \\
 y &= \frac{5}{2} = 2,5
 \end{aligned}$$

Titik C(5, 2.5)

- Titik D → perpotongan garis $5x + 2y = 30$ dengan $x = 0$

$$\begin{aligned}
 5x + 2y &= 30 \rightarrow 5(0) + 2y = 30 \\
 2y &= 30 \\
 y &= \frac{30}{2} = 15
 \end{aligned}$$

Titik D(0, 15)

Terakhir menentukan nilai optimum dengan mensubsitisi semua titik pojok kedalam fungsi f .

$$f = 3x + 2y$$

$$\begin{aligned}
 A(0,0) &\rightarrow 3(0) + 2(0) = 0 \\
 B(10,0) &\rightarrow 3(10) + 2(0) = 30 \\
 C(5, 2.5) &\rightarrow 3(5) + 2(2,5) = 20 \\
 D(0,15) &\rightarrow 3(0) + 2(15) = 30
 \end{aligned}$$

Dengan demikian nilai maksimumnya adalah 30.

Untuk memecahkan suatu permasalahan sehari-hari tentang optimasi (nilai maksimum dan minimum) dengan menggunakan program linear, terlebih dahulu kita harus menterjemahkan permasalahan tersebut kedalam bentuk matematik atau pemodelan matematikanya. Dengan demikian pemodelan matematika yang benar akan menghasilkan nilai optimasi yang benar pula.

Contoh 4. Seorang pengusaha material hendak mengangkut 110 ton barang dari gudang A ke gudang B. Untuk keperluan tersebut dibutuhkan sekurang-kurangnya 50

kendaraan truk yang terdiri atas truk jenis I dengan kapasitas 3 ton dan truk jenis II yang dengan kapasitas 2 ton. Biaya sewa truk jenis I adalah Rp 50.000,- dan truk jenis II adalah Rp 40.000,-. Tentukan berapa banyaknya truk jenis I agar pengusaha tersebut mengeluarkan uang seminimal mungkin.

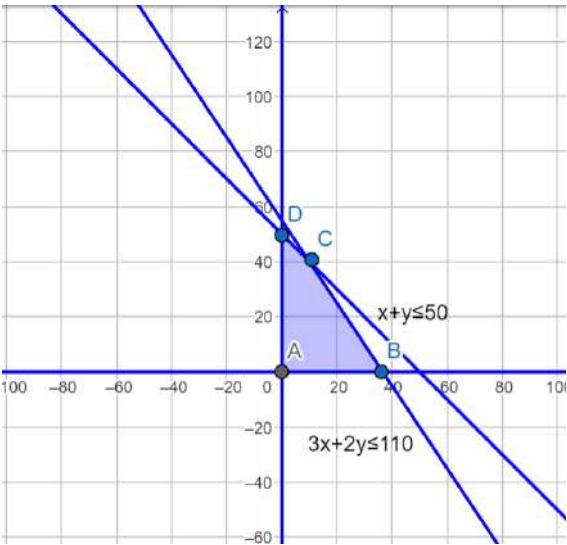
Jawab:

Variabel	Truk I	Truk II	Total
Kapasitas	3 ton	2 ton	110 ton
Jumlah	1	1	50 kendaraan

Misalkan truk I adalah x dan truk II adalah y , berdasarkan tabel diatas pemodelan matematikanya adalah:

$3x + 2y \leq 110$ I
 $x + y \leq 50$ II (fungsi kendala)
 Fungsi objektif: $Z = 50.000x + 40.000y$

Berikut adalah gambar daerah himpunan penyelesaian dari $3x + 2y \leq 110; x + y \leq 50; x \geq 0; y \geq 0$.



Gambar 7.4 himpunan penyelesaian dari $3x + 2y \leq 110; x + y \leq 50; x \geq 0; y \geq 0$

Uji titik pojok:

Titik	x	y	$50.000x + 40.000y$
A	0	0	0
B	36,7	0	1.835.000
C	10	40	2.100.000
D	0	50	2.000.000

- Titik B $\rightarrow 3x + 2y = 110$ dan $y = 0$

$$3x + 2(0) = 110$$

$$3x = 110$$

$$x = \frac{110}{3} = 36,7$$

- Titik C $\rightarrow 3x + 2y = 110$ dan $x + y = 50$

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y = 110 & \times 1 & 3x + 2y = 110 \\ x + y = 50 & \times 2 & 2x + 2y = 100 \\ \hline & & x = 10 \end{array}$$

$x + y = 50$ dan $x = 10$, maka:

$$10 + y = 50$$

$$y = 50 - 10 = 40$$

- Titik D $\rightarrow x + y = 50$ dan $x = 0$

$$0 + y = 50$$

$$y = 50$$

Jadi agar pengusaha tersebut mengeluarkan uang seminimal mungkin dia harus tidak menggunakan truk jenis II dan menggunakan truk jenis I sebanyak 36,7 buah atau 37 buah (dibulatkan).

7.3.2 Metode Garis Selidik

Dengan menggunakan suatu garis kita dapat menemukan nilai optimum dari suatu fungsi kendala dan fungsi objektif. Garis tersebut merupakan garis selidik.

Langkah-langkah yang perlu dilakukan untuk menggunakan garis selidik :

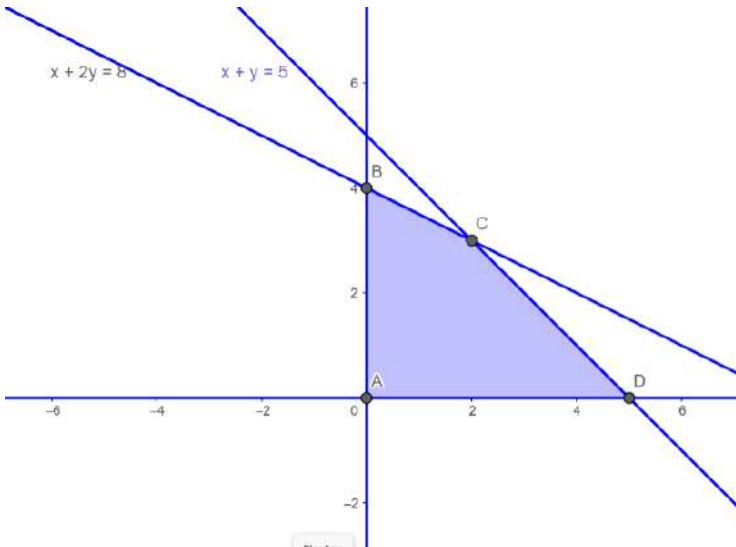
1. Buatlah fungsi $ax + by = ab$ dari fungsi objektif.
2. Buatlah garis-garis $ax + by = ab$ lain dengan cara menggeser ke kanan atau ke kiri.

- Garis $ax + by = ab$ paling kiri pada gambar himpunan penyelesaian melalui titik x_1, y_1) sehingga $ab = ax_1 + by_1$, merupakan nilai minimum.
- Garis $ax + by = ab$ paling kanan pada gambar himpunan penyelesaian melalui titik x_2, y_2) sehingga $ab = ax_2 + by_2$, merupakan nilai maksimum.

Contoh 5. Gunakan garis selidik untuk menentukan nilai x dan y sehingga fungsi objektifnya maksimum dan minimum dari persamaan $Z = 2x + y; x + y \leq 5; x + 2y \leq 8; x \geq 0; y \geq 0$.

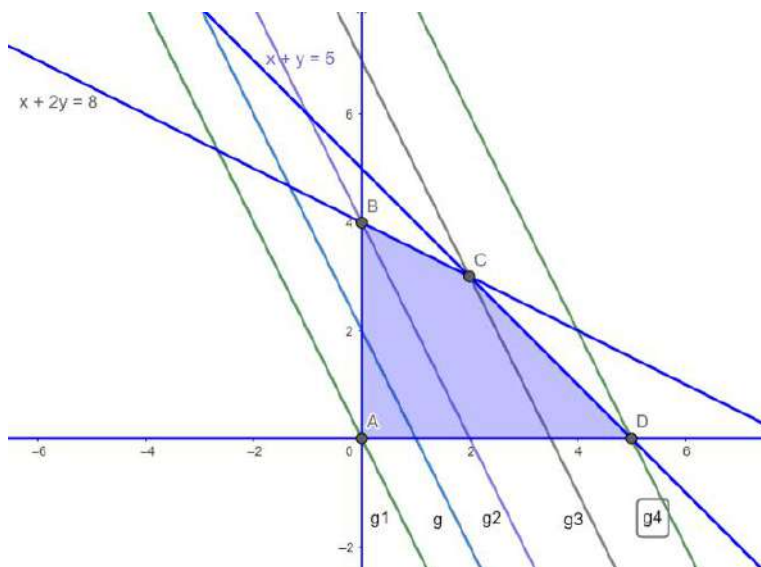
Jawab:

Berikut adalah himpunan penyelesaian dari $x + y \leq 5; x + 2y \leq 8; x \geq 0; y \geq 0$.



Gambar 7.5. himpunan penyelesaian dari $x + y \leq 5; x + 2y \leq 8; x \geq 0; y \geq 0$.

Buatlah persamaan garis dari fungsi objektif yaitu $2x + y = 2 = k$, misalkan dinamai garis g. Perhatikan gambar 2.5, gesr garis g sehingga memotong titik A, B, C dan D, seperti pada gambar berikut.



Gambar 7.6. Titik optimum dengan garis selidik

Garis g bila di geser ke kanan dan ke kiri, didapat bahwa garis g paling kiri berpotongan pada titik $A(0,0)$ sehingga $2x + y = k \rightarrow 2(0) + 0 = 0$, ini merupakan nilai minimum. Kemudian garis g paling kanan berpotongan pada titik $D(5,0)$ sehingga $2x + y = k \rightarrow 2(5) + 0 = 10$, ini merupakan nilai maksimum.

Jadi nilai minimum diperoleh saat $x = 0$ dan $y = 0$, sedangkan nilai maksimum diperoleh saat $x = 5$ dan $y = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

- Masrihani, T., Kurnianingsih, S., Kuntarti, & Sulistiyono. 2008. *Matematika: program keahlian akuntansi dan penjualan*. Jakarta: Erlangga.
- Syahputra, E. 2017. *Program Linier*. Medan: Universitas Medan Press.
- To'ali. 2008. *Matematika menengah kejuruan*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.
- Zulyadaini. 2017. *Program linier*. Yogyakarta: Tangga Ilmu.

BAB 8

RELASI DAN FUNGSI

Oleh Rahma Faelasofi

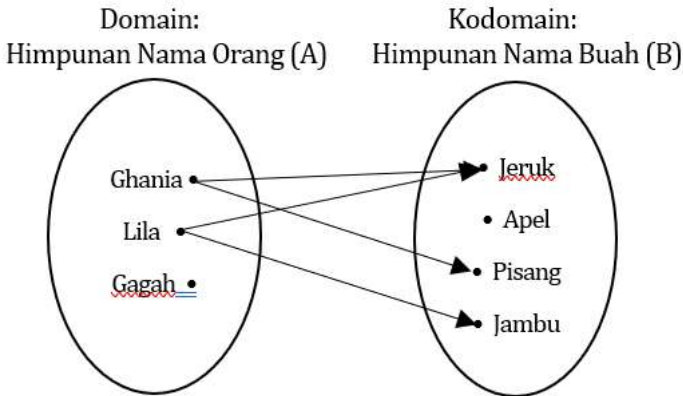
8.1 Relasi

Relasi adalah kumpulan pasanganan elemen yang berurutan dari daerah asal (domain) ke daerah kawan (kodomain), yang menunjukkan adanya keterhubungan antar elemen objek. Selain itu, hubungan tersebut dapat digambarkan ke diagram panah dan diagram kartesius (Trybulec, 1990). Himpunan adalah elemen-elemen objek yang diidentifikasi untuk dikelompokkan dapat berupa bilangan atau teks (Partee, Meulen and Wall, 1990).

Hubungan yang dinyatakan pada relasi tersebut digambarkan dalam diagram. Beberapa istilah yang terkait dengan diagram relasi, adalah:

1. Himpunan daerah asal (domain) merupakan kumpulan elemen objek daerah asal yang terhubung dengan himpunan objek daerah kawan, dapat dinotasikan dengan D_f .
2. Himpunan daerah kawan (kodomain) merupakan kumpulan elemen objek daerah kawan yang keterhubungannya ditunjukkan oleh tanda panah.
3. Daerah hasil (*range*) adalah elemen objek daerah kawan yang terhubung dengan elemen objek daerah asal. *Range* dinotasikan dengan R_f
4. Notasi relasi dinyatakan dalam tanda silang yaitu ($\times$), misalnya hubungan elemen objek di A dan B , dapat dinotasikan sebagai $A \times B$

Contoh:



Gambar 8.1. Relasi yang menunjukkan hubungan nama siswa dan buah yang disukai

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat diketahui:

1. Domain D_f

$$A = \{Ghania, Lila, Gagah\}$$

2. Kodomain

$$B = \{Jeruk, Apel, Pisang, Jambu\}$$

3. Range elemen objek A ke B

Range sebagai daerah hasil yang memuat elemen objek yang berada di kodomain (B) berhubungan dengan elemen objek di domain (A) yaitu:

$$R_f = \{Jeruk, Pisang, Jambu\}$$

4. Notasi relasi A ke B

Adanya keterhubungan elemen objek di daerah asal ke elemen objek di daerah kawan yang ditandai dengan pemberian tanda panah yaitu:

$(Ghania, Jeruk)$

$(Ghania, Pisang)$

$(Lila, Jeruk)$

$(Ghania, Jeruk)$

$(Lila, Jambu)$

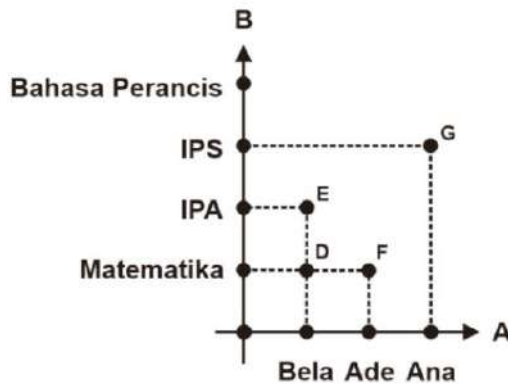
Gagah, tidak terhubung dengan elemen objek di B .
Sehingga daerah hasil dinyatakan berikut:

$$A \times B$$

$$= \{(Ghania, Jeruk), (Ghania, Jambu), (Ghania, Jeruk), (Lila, Jambu)\}$$

Contoh:

Diketahui gambar diagram kartesius dibawah ini dapat menunjukkan hubungan pasangan berurutan sebagai kumpulan objek di A ke B , dimana A menyatakan nama siswa, sedangkan B sebagai pilihan kompetisi mata pelajaran yang diikuti:



Tentukan domain, kodomain, daerah hasil, dan notasi keterhubungan dari diagram kartesius tersebut!

Penyelesaian:

5. Domain D_f

Pada diagram kartesius tersebut domain berada di sumbu horizontal yaitu himpunan A

$$A = \{Bela, Ade, Ana\}$$

6. Kodomain

Kodomain berada di sumbu vertikal yaitu himpunan B

$$B = \{Matematika, IPA, IPS, Bahasa Perancis\}$$

7. Daerah hasil

Daerah hasil pada diagram tersebut merupakan elemen objek di kodomain yang terhubung dengan domain, yaitu:

$$R_d = \{Matematika, IPA, IPS\}$$

8. Notasi relasi A ke B

Keterhubungan elemen objek A ke B ditunjukkan dengan adanya titik potong, yaitu:

$$\text{Titik D: } (Bela, Matematika)$$

$$\text{Titik E: } (Bela, IPA)$$

Titik $F: (Ade, Matematika)$

Titik $G: (Ana, IPS)$

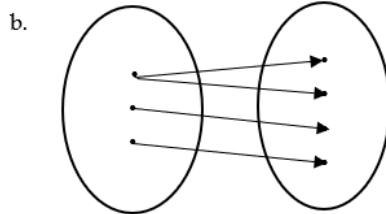
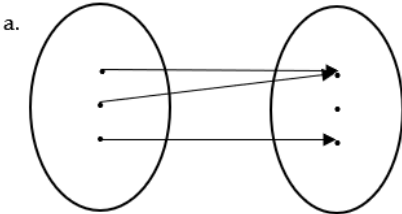
Jadi, notasi relasi A ke B :

$$A \times B$$

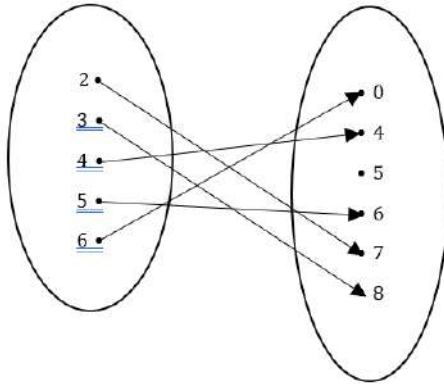
$$= \{(Bela, Matematika), (Bela, IPA), (Ade, Matematika), (Ana, IPS)\}$$

Latihan:

1. Manakah dari diagram berikut yang menunjukkan hubungan relasi:



2. Tentukan domain, kodomain, dan notasi relasi, dari relasi dalam diagram panah berikut:



8.2 Fungsi

8.2.1 Pengertian Fungsi

Fungsi merupakan bentuk persamaan besaran matematika yang saling berhubungan, jika hasil dari persamaan mengalami perubahan, maka perolehan persamaan akan mengalami perubahan juga (Pfeffer, 1997).

Contoh:

$$f(x) = 2x - 1$$

Misal untuk membuat menjadi hubungan suatu fungsi dimisalkan ada suatu objek besaran di A untuk substitusi

dengan x . Kemudian, substitusikan besaran di A tersebut ke $f(x)$.

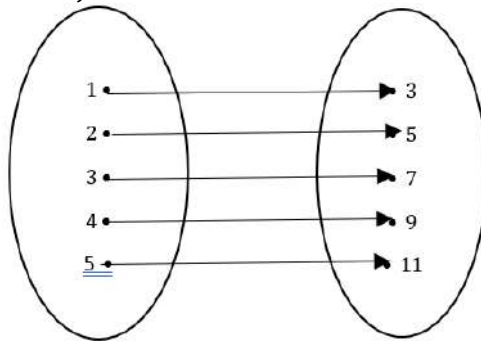
Jika: $A = 1$, maka:

$$B = 2(x) + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$B = 2(x) + 1 = 2(2) + 1 = 5$$

dst

Sehingga dapat disajikan :



Gambar 8.2. Fungsi Matematika untuk $f(x) = 2x - 1$

Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dinyatakan bahwa "Setiap elemen objek di A berpasangan tepat satu di elemen objek di B ".

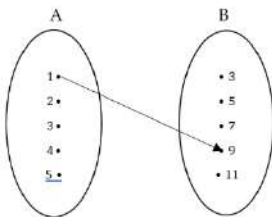
sehingga, dapat dinyatakan $f(x): A \rightarrow B$

Dimana:

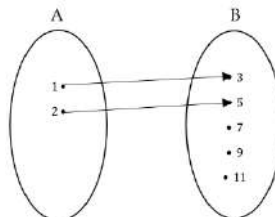
A : domain (daerah asal)

B : kodomain (daerah kawan)

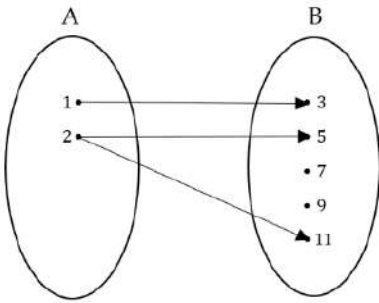
Selanjutnya, dari ilustrasi (1), (2), (3), dan (4) berikut ini, manakah yang **Bukan Fungsi**:



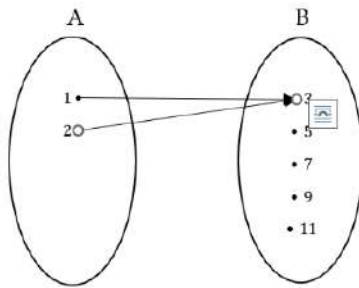
(1)



(2)



(3)

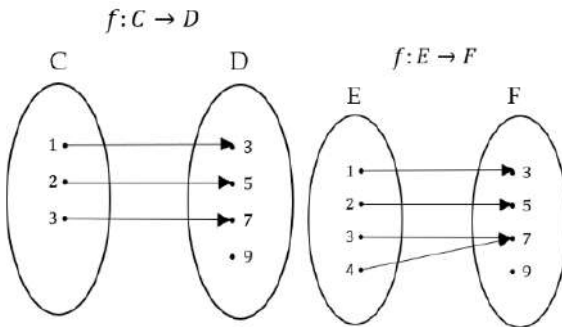


(4)

8.2.2 Sifat-sifat Fungsi

1. Fungsi Injektif (satu-satu)

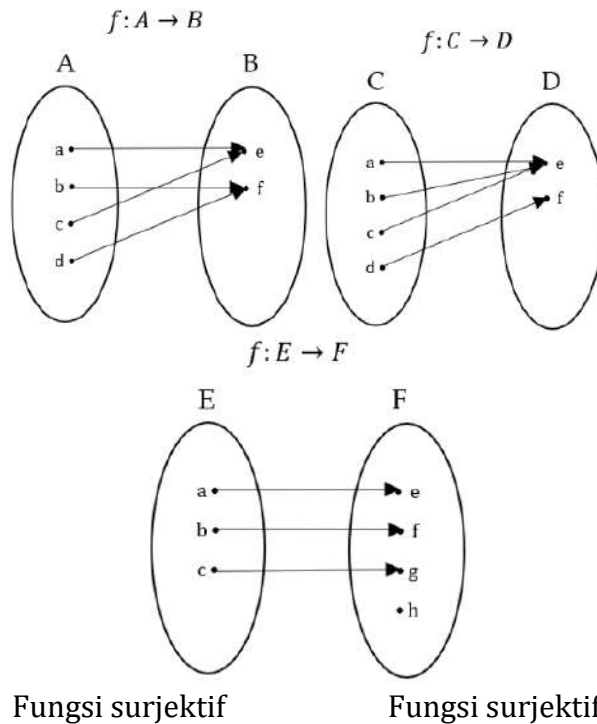
Fungsi injektif merupakan fungsi tiap elemen objek di daerah kawan tidak mempunyai hubungan yang lebih dari elemen objek di daerah asal (Ambro, 2014). Fungsi injektif atau fungsi satu-satu karena tiap elemen objek daerah kawan hanya dapat dihubungkan satu kali.



Fungsi injektif Bukan fungsi injektif, elemen 4 berelasi 2x

2. Fungsi Surjektif (on-to)

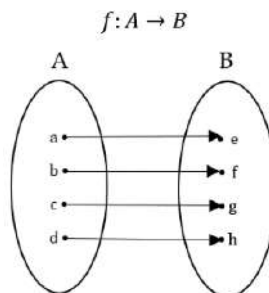
Fungsi surjektif adalah fungsi dengan semua elemen objek di daerah kawan terhubung dengan elemen objek di daerah asal (Bartoszewicz *et al.*, 2016). Fungsi surjektif disebut sebagai fungsi "on-to". Contoh:



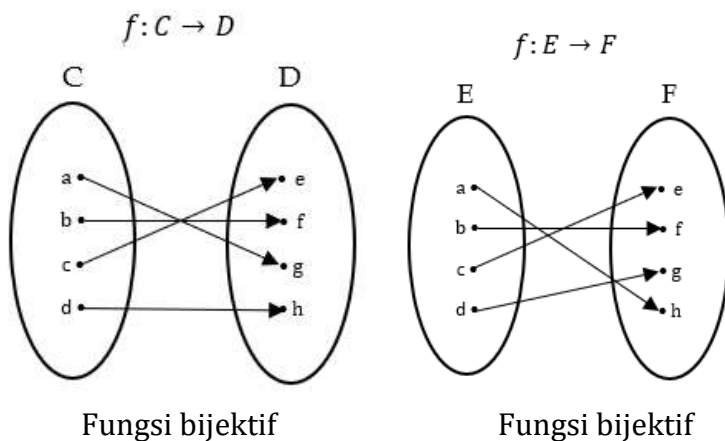
Bukan surjektif, karena elemen h tidak berelasi. Namun, termasuk injektif.

3. Fungsi Bijektif (korespondensi satu-satu)

Fungsi bijektif merupakan fungsi dengan sifat injektif dan surjektif. Fungsi bijektif atau fungsi korespondensi satu-satu, karena elemen objek di daerah asal dan elemen objek di daerah kawan terhubung satu-satu (Sourial *et al.*, 2010).



Ilustrasi di atas, sebagai contoh fungsi bijektif.



8.2.3 Jenis-jenis Fungsi Matematika

1. Fungsi konstan (polinom berderajat 0)

Fungsi matematika dari polinom berderajat 0 atau konstan yaitu: $f(x) = c$, dengan c adalah nilai konstan.

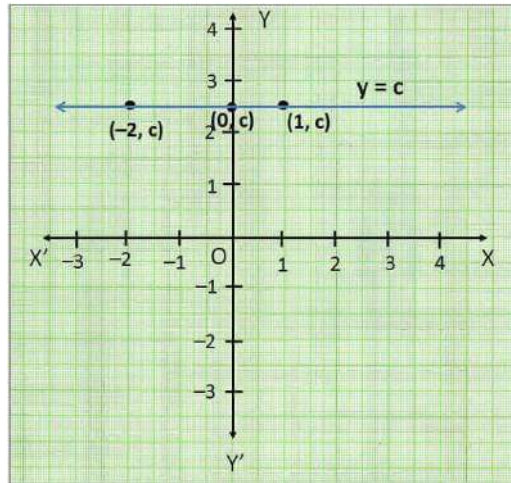
Contoh:

$f(x) = 2 \rightarrow$ artinya c bernilai 2, berarti setiap elemen objek x anggota domain f , bernilai $f(x) = 2$

$f(x) = -1 \rightarrow$ artinya c bernilai -1, berarti setiap elemen objek x anggota domain f , bernilai $f(x) = -1$

Selanjutnya dengan fungsi $f(x) = c$, untuk $x \in R$ dan c adalah konstan, maka gambaran dari fungsi tersebut berdasarkan nilai x dengan batas domain fungsinya yaitu: $D_f: \{0, 1, 2\}$, dapat diperoleh:

x	0	1	-2
$f(x)$	c	c	C



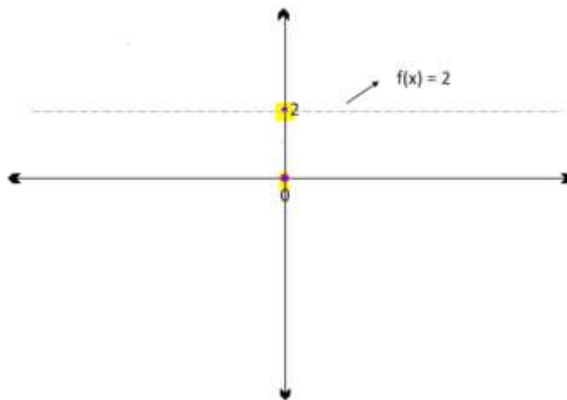
Gambar 8.3. Ilustrasi Domain dan Daerah Fungsi Konstan
(Sumber:teachoo.com)

Contoh soal fungsi konstan:

$$f(x) = 2$$

$$f(x) = y = 2$$

Maka $x = 0$, dari ilustrasi tersebut dapat digambarkan pada bidang kartesius



2. Fungsi linear (polinom berderajat 1)

Fungsi linear yaitu fungsi dengan pangkat tertingginya sama dengan satu yang disebut juga sebagai fungsi polinom

berderajat 1.

Rumus fungsi linear sebagai berikut:

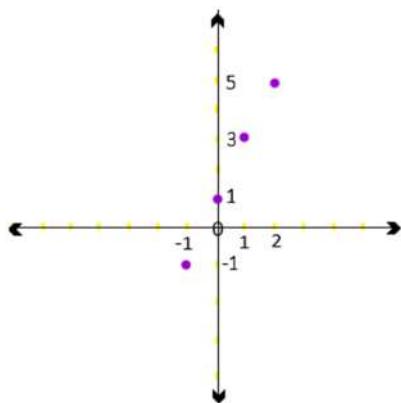
$$f(x) = ax + b, \text{ dengan } a \neq 0$$

Contoh:

Buatlah grafik fungsi $f(x) = 2x + 1$ dengan $D_f: \{x \mid -1 \leq x < 2, x \in \text{bilangan bulat}\}$. Dari fungsi tersebut dapat dibentuk titik koordinatnya.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5
Koordinat titik	-1,1	0,1	1,3	2,5

Selanjutnya dari koordinat tersebut dapat dilanjutkan dengan membuat grafik berdasarkan perolehan dari koordinat titik tersebut.



3. Fungsi Polynomial

Fungsi polynomial dikatakan sebagai suku banyak. Bentuk umumnya yaitu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

Bentuk fungsi polinom tersebut disebut fungsi polinom berderajat n .

Contoh:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4 \rightarrow \text{fungsi polinom berderajat 4}$$

$$f(x) = 2 - 4x + x^2 \rightarrow \text{fungsi polinom berderajat 2}$$

$$f(x) = -20 \rightarrow \text{fungsi polinom berderajat 0 (fungsi kontinu)}$$

$f(x) = 4x - 10 \rightarrow$ fungsi polinom berderajat 1 (fungsi linear)

Contoh:

Grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - x - 20$ memotong sumbu x di titik?

Jawab:

Jika memotong sumbu x maka $y = 0$.

Selanjutnya, $x^2 - x - 20 = 0$ (kemudian faktorkan), maka diperoleh $(x - 5)(x + 4) = 0$

Maka: $x - 5 = 0$ dan $x + 4 = 0$

Sehingga, $x_1 = 5$ dan $x_2 = -4$

Jadi diperoleh $(5,0)$ dan $(-4,0)$

4. Fungsi rasional

Fungsi rasional berdasarkan komponen bilangan rasional, dinyatakan dengan : bilangan rasional $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$.

Bentuk umum yaitu:

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, dimana $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi polinom dan $q(x) \neq 0$.

Contoh:

Diketahui suatu fungsi:

$$f(x) = \frac{x + 5}{x - 6}$$

Tentukan:

- Domain $f(x)$
- Range $f(x)$
- Sumbu asimtot vertical
- Sumbu asimtot horizontal
- Gambarkan grafik

Jawab:

- Pada fungsi rasional, penyebut tidak boleh sama dengan nol, jika $x \neq 0$, dengan $x - 6 \neq 0$, dan $x \neq 6$

Maka: $D_f: \{x | x \neq 6, x \in R\}$

- Mengubah fungsi $f(x)$ menjadi x

Misalkan: $f(x) = y$

$$y = \frac{x+5}{x-6}$$

y kemudian dikalikan dengan penyebut menjadi:

$$y(x-6) = x+5$$

$$xy - 6y = x+5$$

$$xy - x = 6y + 5$$

$$x(y-1) = 6y+5$$

$$x = \frac{6y+5}{y-1}$$

Selanjutnya menentukan range, dimana penyebut tidak boleh sama dengan 0, maka

$$y-1 \neq 0$$

$$y \neq 1$$

$$R_f: \{y|y \neq 1, y \in \mathbb{R}\}$$

- c. Sumbu asimtot vertical didapatkan dari domain $f(x)$

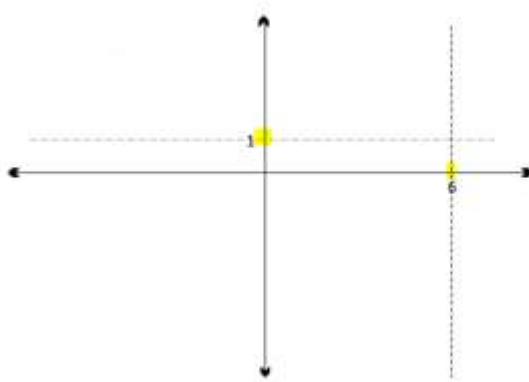
$$\text{yaitu } x \neq 6$$

Maka sumbu asimtotnya adalah $x = 6$

- d. Sumbu asimtot horizontal diperoleh dari *range* $f(x)$ yang sudah dicari tadi, yaitu $y \neq 1$

Maka asimtotnya adalah $y = 1$

- e. Grafik:



Selanjutnya:

$$\text{Jika } y = 0 = \frac{x+5}{x-6}$$

$$x+5 = 0$$

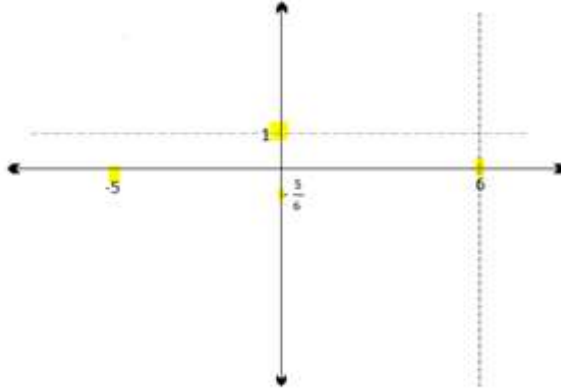
$$x = -5$$

Berarti $(-5,0)$

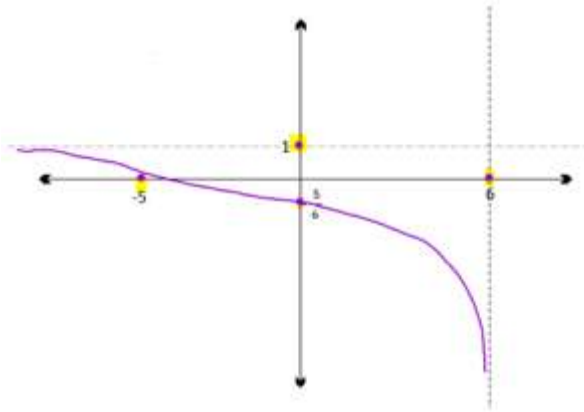
Jika $x = 0$

$$y = \frac{0+5}{0-6} = -\frac{5}{6}, \text{ berarti } \left(0, -\frac{5}{6}\right)$$

Selanjutnya, digambarkan ke dalam grafik fungsi, sehingga diperoleh:



Berikutnya tarik garis sesuai titik, garis akan mendekati asimtot, seperti ini:



5. Fungsi logaritma dan eksponensial

Fungsi eksponensial merupakan fungsi nonaljabar yang tidak diidentifikasi pada jumlahan atau perbedaan variabel yang dipangkatkan ke bilangan bulat non-negatif (Yang and Liou, 1997). Fungsi ini sebagai fungsi berpangkat, yang pangkatnya memiliki variabel (Ringrose, 1992).

Fungsi eksponen dinyatakan:

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

Contoh:

- $f(x) = 3^x$
- $f(x) = 5^x$

Fungsi eksponensial berdasarkan adanya nilai basis berupa konstanta pada pangkat atau eksponen yang dinyatakan berupa variabel (dapat berupa kombinasi antara konstanta dan variabel).

Fungsi ini digambarkan dengan bentuk yang khas dari grafik yang dihasilkan, yaitu lengkungan yang menurun atau menaik.

Pemanfaatan fungsi eksponensial sering digunakan bidang ilmu lainnya seperti bidang keilmuan ekonomi, biologi, kimia, matematika, serta ilmu komputer.

Contoh:

Titik potong dengan sumbu:

$$Y: x = 0$$

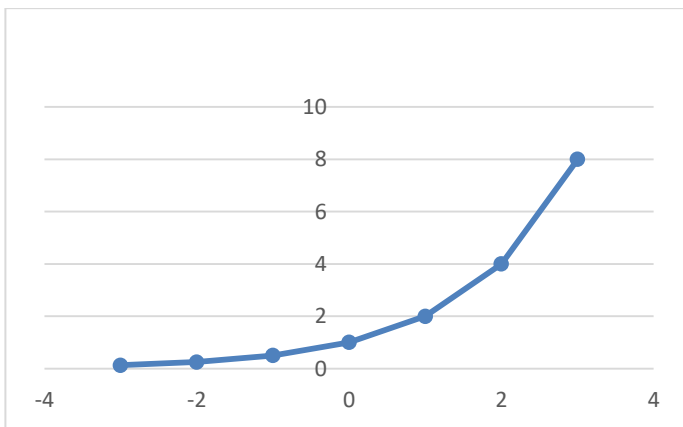
Sehingga :

$$y = 2^0 = 1$$

Jadi titiknya (0,1),

Selanjutnya akan diperoleh titik-titik berikut ini:

x	y	x, y
-3	1/8	(-3,1/8)
-2	1/4	(-2,1/4)
-1	1/2	(-1,1/2)
0	1	(0,1)
1	2	(1,2)
2	4	(2,4)
3	8	(3,8)



Gambar 8.4. Grafik fungsi eksponensial

Berdasarkan grafik di atas, terlihat fungsi eksponensial mengidentifikasi sebagai bilangan dan $a \neq 1$. Jika $a > 0$ dan $a \neq 1, x \in R$, maka $f: (x) = a^x$.

Sifat fungsi eksponensial:

1. Sebagai gambaran hasil pada kurva di sumbu x yang berfungsi sebagai bilangan yang positif
2. Sebagai suatu bilangan dapat memotong sumbu y pada titik $(0,1)$
3. Sebagai asimtot datar $y = 0$ sebagai sumbu x dengan garis sejajar pada sumbu x
4. Memiliki grafik monoton naik pada bilangan $x > 1$
5. Memiliki grafik monoton turun pada bilangan $0 < x < 1$

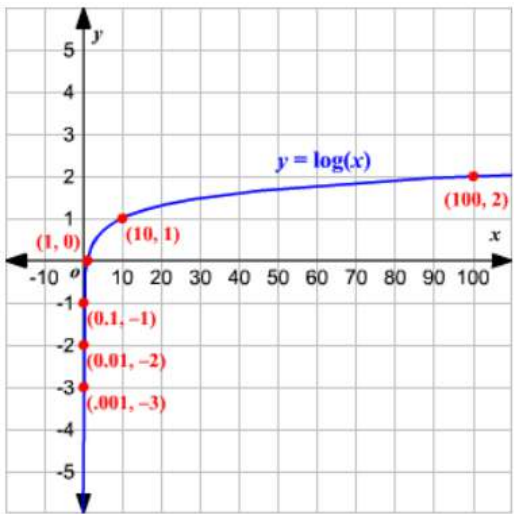
Fungsi logaritma merupakan fungsi yang memuat bentuk logaritma (García-Ortíz, Acosta and Ramos-Fernández, 2017). Fungsi logaritma sederhana:

$$f(x) = {}^a\log_x$$

dengan $a > 0, a \neq 1$, dan $x > 0$ dengan x adalah variabel bebas. Fungsi logaritma memiliki karakteristik berdasarkan nilai basis (a), yaitu naik dan turun bentuk grafik fungsi kuadratnya. Selanjutnya grafik fungsi logaritma, dapat dibentuk dengan $f(x) = {}^a\log_x$, tergantung dari nilai basisnya (bilangan pokok). Jika $a > 1$, maka grafiknya naik, dan jika $0 < a < 1$, maka grafiknya turun. Ilustrasi dari grafik fungsi logaritma

berikut ini:

Berikut ini contoh dari grafik fungsi logaritma:



Gambar 8.5. Grafik fungsi logaritma
(Sumber: <https://www.varsitytutors.com>)

DAFTAR PUSTAKA

- Ambro, F. (2014) 'An injectivity theorem', *Compositio Mathematica*, 150(6), pp. 999–1023. doi: 10.1112/S0010437X13007768.
- Bartoszewicz, A. *et al.* (2016) 'Algebraic structures in the sets of surjective functions', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441(2), pp. 574–585. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.04.013.
- García-Ortíz, A. J., Acosta, M. D. C. L. and Ramos-Fernández, J. C. (2017) 'Distortion Type Theorems for Functions in the Logarithmic Bloch Space', *Journal of Function Spaces*, 2017(0). doi: 10.1155/2017/8694516.
- Partee, B. H., Meulen, A. G. ter and Wall, R. (1990) *Mathematical Methods in Linguistics Studies in Linguistics and Philosophy*. 1st edn. London: Kluwer Academic Publisher.
- Pfeffer, W. F. (1997) 'On Variations of Function of One Real Variable', *Comment.Math.Univ Caroline*, 38(1), pp. 61–71.
- Ringrose, J. R. (1992) 'Exponential length and exponential rank in c-algebras', in *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, pp. 55–71. doi: 10.1017/S0308210500014141.
- Sourial, N. *et al.* (2010) 'Correspondence analysis is a useful tool to uncover the relationships among categorical variables', *Journal of Clinical Epidemiology*, 63(6), pp. 638–646. doi: 10.1016/j.jclinepi.2009.08.008.
- Trybulec, A. (1990) 'Domains and Their Cartesian Products', *Formalized Mathematics*, 1(1), pp. 115–122. Available at: http://fm.mizar.org/1990-1/pdf1-1/domain_1.pdf.
- Yang, P. and Liou, K. N. (1997) 'Light scattering by hexagonal ice crystals: solutions by a ray-by-ray integration algorithm', *Journal of the Optical Society of America A*, 14(9), p. 2278. doi: 10.1364/josaa.14.002278.

BAB 9

SUKU BANYAK

Oleh Marzuki Ahmad

9.1 Pendahuluan

Sistem persamaan suku banyak (polinomial) adalah sistem persamaan dalam bentuk aljabar yang melibatkan variabel variabel dan eksponen dengan pangkat tertinggi dari variabelnya lebih besar dari 2 (> 2). Persamaan suku banyak memiliki pola umum sebagaimana terdapat di bawah ini.

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dimana :

- Derajat (n) adalah pangkat yang tertinggi pada persamaan aljabar suatu suku banyak (polinomial).
- Variabel (x) merupakan suatu bilangan yang dibuat dalam bentuk pemisalan dalam hal ini digunakan huruf x .
- Koefisien (a) adalah konstanta yang merupakan bilangan yang mengiringi suatu variabel.

Berikut ini disajikan beberapa contoh persamaan suku banyak (polinomial).

- $5x^3 - 4x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow$ Polinomial berderajat 3
- $8x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow$ Polinomial berderajat 4
- $2x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow$ Polinomial berderajat 5

9.2 Operasi pada Suku Banyak

Sistem persamaan pada suku banyak (polinomial) secara umum memiliki operasi dasar yang sama dengan sistem persamaan kuadrat. Operasi yang dimaksud meliputi operasi **penjumlahan (penambahan), operasi pengurangan dan operasi Perkalian**. Selanjutnya terdapat juga operasi lainnya seperti pembagian, pemaktoran dll dengan menggunakan

berbagai strategi. Terkait dengan operasi dasar pada suku banyak dengan melibatkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan memiliki derajat m dan n , diperoleh teorema sebagai berikut.

1. $f(x) \pm g(x)$ merupakan suku banyak (polinomial) yang memiliki pangkat maksimum m atau n .
2. $f(x) \times g(x)$ merupakan suku banyak (polinomial) yang pangkat maksimum $(m + n)$.

9.2.1 Penjumlahan

Penjumlahan pada sistem persamaan suku banyak (polinomial) dilaksanakan dengan menjumlahkan suku suku aljabar yang sejenis, dengan kata lain suku yang dijumlahkan adalah suku yang mempunyai peubah (variabel) dan pangkat (eksponen) yang sama (Istiqomah, 2020). Penjumlahan dalam suku banyak tidak menghasilkan kenaikan derajat atau pangkat pangkat tertinggi suatu suku banyak yang berarti suku banyak yang dihasilkan adalah dalam bentuk pangkat (eksponen) yang tetap.

Contoh 1.

Diketahui $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 9x + 8$ dan $g(x) = 4x^3 + 7x^2 + 10x + 3$. Maka nilai $f(x) + g(x) = (2 + 4)x^3 + (5 + 7)x^2 + (9 + 10)x + (8 + 3) = 6x^3 + 12x^2 + 19x + 11$.

Contoh 2.

Dinyatakan bahwa $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 9x + 8$, $g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 3$ dan $H(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Tentukanlah nilai dari penjumlahan $f(x) + g(x) + H(x)$!, Dengan demikian hasil penjumlahan dari $f(x) + g(x) + H(x) = (8 + 2 + 1)x^3 + (5 + 6 + 2)x^2 + (9 + 5 + 2)x + (8 + 3 + 1) = 11x^3 + 13x^2 + 16x + 12$.

9.2.2 Pengurangan

Pengurangan pada sistem persamaan suku banyak (polinomial) dilakukan dengan mengurangi suku suku aljabar yang mempunyai peubah (variabel) dan pangkat (eksponen) yang sama. Hal ini mengakibatkan tanda fungsi yang dikurangi menjadi berubah. Jika positif akan berubah menjadi negatif dan sebaliknya yang negatif berubah menjadi positif.

Pengurangan suku banyak dapat dilakukan dengan mengubah tanda, menghilangkan tanda kurung dan menyusun persamaan (Wulandari, 2011). Dalam hal ini sangat penting untuk memperhatikan tanda plus dan minus yang terdapat pada suku suku aljabar.

Contoh 3.

Diberikan suatu fungsi $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7x + 12$ dan $g(x) = 2x^3 + 8x^2 + 6x + 4$. Maka nilai fungsi $f(x) - g(x) = (8 - 2)x^3 + (5 - 8)x^2 + (7 - 6)x + (12 - 4) = 4x^3 + (-3)x^2 + 1x + 8 = 6x^3 - 3x^2 + x + 8$.

Contoh 4.

Dinyatakan $f(x) = 13x^3 + 8x^2 + 5x + 3$, dan $g(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ dan $H(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 2$. Maka nilai $f(x) - g(x) - H(x) = (13 - 6 - 2)x^3 + (8 - 3 - 5)x^2 + (5 - 2 - 4)x + (3 - 6 - 2) = 5x^3 + 0x^2 + (-1)x + (-5) = 5x^3 - x - 5$

9.2.3 Perkalian

Perkalian dalam bentuk aljabar melibatkan aktivitas mengalikan setiap suku yang ada dalam sistem persamaan suku banyak (polinomial) aljabar satu per satu. Dalam hal perkalian ini digunakan sifat distributif dalam perkalian. Proses perkalian yang dilakukan akan menghasilkan pangkat (eksponen) aljabar yang lebih tinggi. Terdapat perbedaan antara operasi pada operasi aljabar dan operasi pada polinomial yaitu pada operasi aljabar diberlakukan kali silang dan pindah ruas, sementara dalam operasi polinomial kali silang dan pindah ruas tersebut tidak diberlakukan.

Contoh 5.

Misalkan suatu polinomial berupa $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ dan $g(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x + 4$.

Maka hasil perkalian dari $f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 &= f(5x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \cdot (3x^3 + 5x^2 + 7x + 4) \\
 &= (5x^3(3x^3 + 5x^2 + 7x + 4)) + (3x^2(3x^3 + 5x^2 + 7x + 4)) \\
 &\quad + (4x(3x^3 + 5x^2 + 7x + 4)) + (2(3x^3 + 5x^2 + 7x + 4)) \\
 &= (15x^6 + 25x^5 + 35x^4 + 20x^3) + (9x^5 + 15x^4 + 21x^3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 12x^2) + (12x^4 + 20x^3 + 28x^2 + 16x) + (6x^3 + 10x^2 + 14x + 8) \\
 & = 15x^6 + (25 + 9)x^5 + (35 + 15 + 12)x^4 + (20 + 21 + 20 + 6)x^3 \\
 & + (12 + 28 + 10)x^2 + (16 + 14)x + 8 \\
 & = 15x^6 + 34x^5 + 62x^4 + 67x^3 + 50x^2 + 30x + 8
 \end{aligned}$$

9.3 Kesamaan Suku Banyak

Sebagaimana telah disampaikan sebelumnya, secara umum suku banyak memiliki pola

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dan suku banyak lainnya dapat di nyatakan dengan pola

$$G(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Jika $F(x) \equiv G(x)$, maka $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_1 = b_1$

$F(x) \equiv G(x)$ merupakan notasi dari kesamaan suku banyak (polinomial). Persamaan suku banyak (polinomial) dikatakan memiliki kesamaan jika masing masing persamaan dari polinomial yang ada memenuhi kriteria berikut :

1. Suku suku aljabar polinomial memiliki pangkat tertinggi (derajat) yang sama.
2. Suku suku aljabar yang seletak pada polinomial ruas kiri dengan kanan memiliki variabel dan koefisien yang sama.

9.4 Pembagian Suku Banyak

Pembagian pada suku banyak (polinomial) dilakukan dengan membagikan suatu fungsi polinomial dengan fungsi lainnya. Terdapat dua cara yang biasa digunakan dalam upaya melakukan pembagian dalam persamaan suku banyak. Pembagian tersebut adalah metode pembagian biasa atau bersusun dan metode horner atau metode pembagian sintetik.

9.4.1 Metode Pembagian Bersusun

Diberikan suku banyak (polinomial) dengan bentuk $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ dibagi dengan $(x - k)$, maka hal tersebut akan memberikan hasil bagi $H(x)$ dan sisa bagi $S(x)$. Hubungan dari komponen komponen yang terdapat pada polinomial ini

dinyatakan dengan $f(x) = (x - k) \cdot H(x) + S(x)$ (Muslihun, 2022). Penetapan produk hasil bagi $H(x)$ dan sisa bagi $S(x)$ dari suku banyak dapat dilakukan dengan metode pembagian bersusun pada suku banyak dengan derajat dua sebagaimana terdapat pada pola dibawah ini.

$$\begin{array}{r}
 x - k \overline{) \begin{array}{l} a_2x + (a_1 + a_2k) = H(x) \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \underline{a_2x^2 + a_2kx} \\ (a_1 + a_2k)x + 0 \\ \underline{(a_1 + a_2k)x - (a_1 + a_2k)k + 0} \\ a_0 + a_1k + a_2k^2 = S(x) \end{array} }
 \end{array}$$

Sehingga hasil bagi dari suku banyak adalah $a_2x + a_2k + a_1$ dan sisa bagi dari suku banyak adalah $a_0 + a_1k + a_2k^2$.

Selanjutnya dalam penentuan hasil pembagian $H(x)$ dan sisa hasil pembagian $S(x)$ dari pembagian polinomial $F(x)$ dengan $G(x)$ dilakukan dengan strategi pembagian bersusun pada suku banyak dengan pangkat tertinggi tiga dalam bentuk $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dapat dilakukan dengan mengikuti pola sebagaimana terdapat dibawah ini.

$$\begin{array}{r}
 x - k \overline{) \begin{array}{l} a_3x^2 + (a_3k + a_2)x + (a_3k^2 + a_2k + a_1) = H(x) \\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \underline{a_3x^3 - a_3kx^2} \\ (a_3k + a_2)x^2 + a_1x \\ \underline{(a_3k + a_2)x^2 - (a_3k^2 + a_2k)x} \\ (a_3k^2 + a_2k + a_1)x + a_0 \\ \underline{(a_3k^2 + a_2k + a_1)x - (a_3k^2 + a_2k + a_1)k} \\ a_0 - (a_3k^2 + a_2k + a_1)k + a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0 = S(x) \end{array} }
 \end{array}$$

Sehingga hasil bagi dari suku banyak adalah $a_3x^2 + (a_3k + a_2)x + (a_3k^2 + a_2k + a_1)$ dan sisa bagi dari suku banyak adalah $a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0$. Penerapan dari formula strategi bersusun yang terdapat diatas dapat diterapkan pada contoh pembagian suku banyak berikut.

Contoh 6.

Diberikan suatu fungsi $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 10$ dan

$g(x) = x - 3$, tentukan hasil bagi dan sisa bagi dari $f(x)$ terhadap $g(x)$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 7x + 22 = H(x) \\
 x - 3 \overline{) 2x^3 + x^2 + x + 10} \\
 \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 7x^2 + x \\
 \underline{7x^2 - 21x} \\
 22x + 10 \\
 \underline{22x - 66} \\
 76 = S(x)
 \end{array}$$

Sehingga hasil bagi dari suku banyak adalah $2x^2 + 7x + 22$ dan sisa bagi dari suku banyak adalah 76.

Contoh 7.

Diberikan $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ dan $g(x) = x + 1$, tentukan hasil bagi dan sisa bagi dari $f(x)$ terhadap $g(x)$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x + 1 = H(x) \\
 x + 1 \overline{) 2x^3 + 3x^2 + 2x + 6} \\
 \underline{2x^3 + 2x^2} \\
 x^2 + 2x \\
 \underline{x^2 + x} \\
 x + 6 \\
 \underline{x + 1} \\
 5 = S(x)
 \end{array}$$

Sehingga hasil bagi dari suku banyak adalah $2x^2 + x + 1$ dan sisa bagi dari suku banyak adalah 5.

Contoh 8.

Diberikan $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ dan $g(x) = x^2 + 3x + 1$, tentukan hasil bagi dan sisa bagi dari $f(x)$ terhadap $g(x)$.

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 6x + 21 = H(x) \\
 x^2 + 3x + 1 \overline{) 4x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 5x + 3} \\
 \underline{4x^4 + 12x^3} \\
 -6x^3 + 3x^2 \\
 \underline{-6x^3 - 18x^2} \\
 21x^2 + 5x + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21x^2 + 5x \\ 21x^2 + 63x \\ \hline -58x + 3 = S(x) \end{array}$$

Sehingga hasil bagi dari suku banyak adalah $4x^2 - 6x + 21$ dan sisa bagi dari suku banyak adalah $-58x + 3$.

9.4.2 Metode Horner

Suku banyak (polinomial) pada bentuk aljabar dengan variabel x dengan memiliki derajat n secara umum dapat dituliskan dengan pola berikut:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dari pola suku banyak tersebut maka n merupakan bilangan cacah yang menjadi penentu derajat suku banyak. Dalam suatu suku banyak, pangkat tertinggi yang terdapat pada peubah atau variabel yang melekat pada koefisien suku banyak dijadikan sebagai penentu derajat suatu suku banyak. $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ merupakan bilangan real dengan $a_n \neq 0$ yang masing masing menjadi satu koefisien dari $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots$. Hingga sampai pada suku yang memiliki derajat paling rendah atau disebut suku tetap yaitu a_0 (Shadiq, 2023).

a. Pembagian suku banyak dengan $(x - k)$

Misalkan diketahui suku banyak dengan pola $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ dibagi dengan suatu fungsi lain dalam bentuk $(x - k)$ maka akan diperoleh produk $H(x)$ dengan sisa $S(x)$. Persamaan yang memberi keterkaitan dari polinomial $f(x)$, pembagi yang digunakan yaitu $(x - k)$, perolehan hasil bagi $H(x)$, dan sisa hasil bagi $S(x)$ adalah :

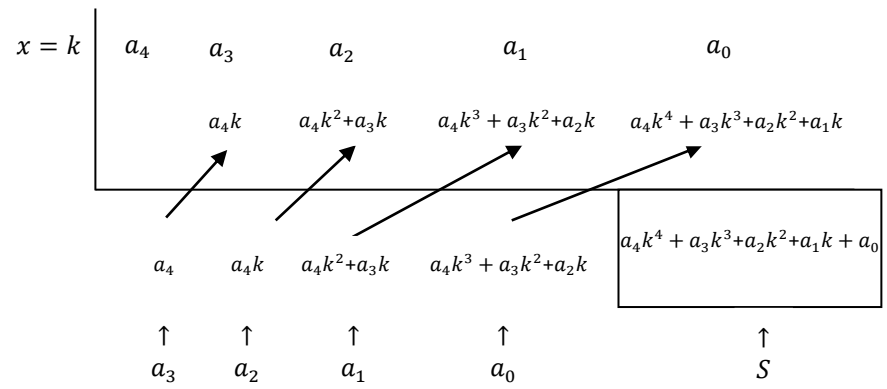
$$f(x) = (x - k) \cdot H(x) + S$$

Selanjutnya a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 dan k adalah konstanta yang

merupakan bilangan real. Dengan demikian fungsi $f(x)$ dengan derajat 4 dan $(x - k)$ berderajat 1, dengan kata lain melalui metode pembagian suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(x - k)$ maka $x = k$.

$$f(k) = a_4 k^4 + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 x + a_0$$

Dengan menggunakan perhitungan langkah demi langkah (algoritma), nilai suku banyak $f(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ tersebut dapat disajikan dengan menggunakan skema atau kerangka metode horner. Metode horner juga disebut sebagai metode pembagian sintetik. Baris pertama dalam skema atau kerangka dalam metode horner ditulis nilai $x = k$, kemudian diiringi oleh koefisien koefisien yang terdapat pada variabel suku banyak (polinomial). Penyusunan koefisien koefisien dalam suku banyak dilakukan dengan memulainya dari pangkat tertinggi sampai pangkat yang terrendah pada variabelnya (Ahmad, 2016). Pembagian dengan metode horner dilakukan dengan megikuti kerangka berikut.



Dari kerangka dapat dicermati bahwa suku banyak $f(x)$ berderajat 4 dan $g(x) = x - k$ berderajat 1, maka hasil bagi dari $f(x)$ terhadap $g(x)$ yaitu $H(x)$ mestilah memiliki derajat 3, yaitu a_3, a_2, a_1, a_0 dan sisa hasil bagi $S(x)$ yang diperoleh semestinya berupa bilangan yang tidak memiliki variabel atau konstanta. Cara menentukan pembagian suku banyak dengan metode metode horner dilakukan dengan penyusunan secara berurutan koefisien koefisien dari pangkat tertinggi sampai

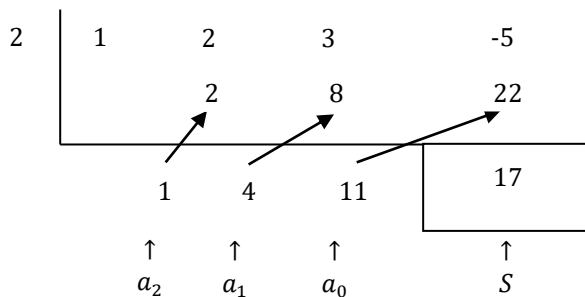
pangkat terrendahnya. Kemudian perhitungan dalam metode tersebut melibatkan operasi penjumlahan dan perkalian. Tanda

↗ pada kerangka pembagian metode horner artinya “mengalikan dengan k”. Dengan mengetahui nilai-nilai a_3, a_2, a_1, a_0 dan sisa hasil bagi $S(x)$ maka hasil bagi $H(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ akan dapat dengan mudah ditentukan. Menentukan hasil bagi $H(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ pada pembagian suku banyak $f(x)$ oleh $(x - k)$ dengan menggunakan bantuan kerangka atau bagan dikenal dengan metode horner.

Contoh 9:

Dengan memanfaatkan metode horner, tentukanlah hasil bagi dan sisa bagi dari sistem persamaan suku banyak (polinomial) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ dengan $g(x) = x - 2$.

Penyelesaian: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$, maka $a_3=1, a_2=2, a_1=3$ dan $a_0=-5$ Selanjutnya $x - 2$ berarti $k = 2$



Dengan demikian, hasil bagi yang diperoleh adalah $H(x) = x^2 + 4x + 11$ dengan sisa pembagian $S(x) = 17$.

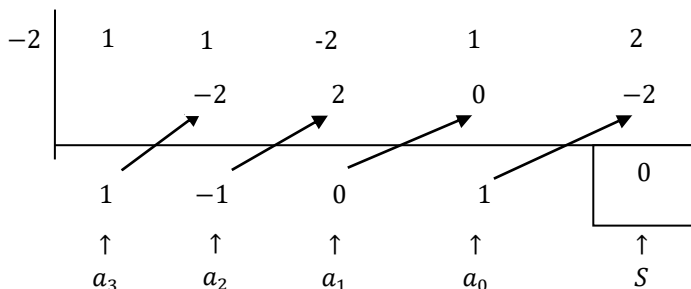
Contoh 10 :

Diberikan $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2$ dengan pembagi polinomial adalah $g(x) = x + 2$. Dengan menggunakan konsep metode horner, tentukan $H(x)$ dan $G(x)$!

Penyelesaian :

Jika persamaan suku banyak dalam bentuk $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2$,

maka $a_4 = 1$, $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = 1$ dan $a_0 = 2$ dengan $x + 2$ berarti $k = -2$



Jadi , hasil bagi $H(x) = x^3 - x^2 + 1$ dengan sisa pembagian $S(x) = 0$

b. Pembagian suku banyak dengan $(ax + b)$

Dari bentuk $(x - k)$, jika diambil $k = \frac{-b}{a}$, maka bentuk $(x - k)$

menjadi $x - (\frac{-b}{a}) = x + \frac{b}{a}$. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi dengan

$x + \frac{b}{a}$ memberikan hasilnya $H(x)$ dan sisa pembagian S , maka

diperoleh hubungan:

$$f(x) = (x + \frac{b}{a}) \cdot H(x) + S$$

Dari persamaan yang diberikan sebelumnya dapat dicermati bahwa hasil bagi $H(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan konsep metode metode

horner, namun nilai k harus di ubah dengan $\frac{-b}{a}$.

Selanjutnya persamaan (2) dapat diubah bentuknya sebagai berikut :

$$f(x) = (x + \frac{b}{a}) \cdot H(x) + S(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{a} (ax + b) \cdot H(x) + S(x)$$

$$f(x) = (ax + b) \cdot \frac{H(x)}{a} + S(x)$$

Dari persamaan yang diuraikan sebelumnya, dapat

dipahami bahwa suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $g(x)$ atau $(ax + b)$ memberikan hasil bagi $\frac{H(x)}{a}$ dan sisa pembagian $S(x)$.

Koefisien koefisien dari $H(x)$ dan sisa pembagian $S(x)$ ditentukan dengan metode horner, namun nilai k juga mesti di ubah dengan $k = \frac{-b}{a}$.

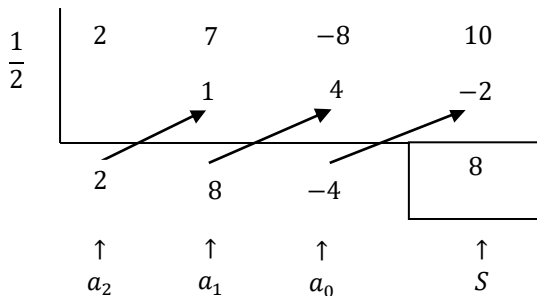
Contoh 11 :

Tentukan hasil bagi $H(x)$ dan sisa bagi $S(x)$ dari pembagian suku banyak $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$ dengan $g(x) = 2x - 1$. Gunakan metode horner untuk memecahkan masalah tersebut!

Penyelesaian :

Jika persamaan suku banyak adalah $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$, maka dinyatakan bahwa $a_3 = 2$, $a_2 = 7$, $a_1 = -8$, dan $a_0 = 10$.

Bentuk $2x - 1$ menjadi $2 (x - \frac{1}{2})$ berarti $a = 2$ dan $k = \frac{1}{2}$



Dari bagan atau kerangka proses pembagian dalam metode horner tersebut diperoleh hasil baginya $H(x) = \frac{2x^2 + 8x - 4}{2} = x^2 + 4x - 2$ dan sisa pembagian $S(x) = 8$. Jadi pembagian suku banyak $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$ dengan $(2x - 1)$ memberikan hasil bagi $x^2 + 4x - 2$ dengan sisa pembagian $S(x) = 8$

Contoh 12 :

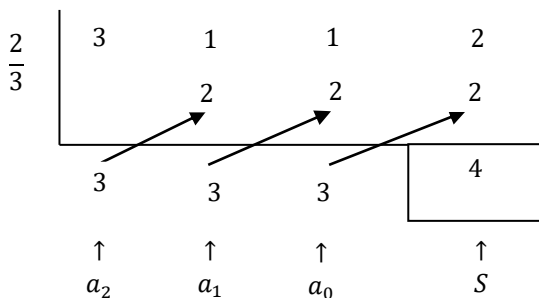
Tentukanlah produk hasil pembagian dan sisa pembagian dari

pembagian polinomial $f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$ dengan $3x - 2$!.
Gunakan metode horner dalam menyelesaikannya.

Penyelesaian :

$f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$, maka $a_3 = 3$, $a_2 = 1$, $a_1 = 1$, dan $a_0 = 2$.

Bentuk $3x - 2$ menjadi $3 (x - \frac{2}{3})$ berarti $a = 3$ dan $k = \frac{2}{3}$



Berdasarkan kerangka perhitungan yang dilakukan dengan metode horner sebelumnya diperoleh hasil bagi

$$\frac{3x^2 + 3x + 3}{3} = x^2 + x + 1 \text{ dan sisa pembagian } S(x) = 4. \text{ Jadi}$$

pembagian suku banyak $f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$ dengan $(3x - 2)$ ditemukan hasil pembagian yaitu $H(x) = x^2 + x + 1$ dengan sisa pembagian $S(x) = 4$.

c. Pembagian suku banyak oleh bentuk $(ax^2 + bx + c)$

Pembagian suku banyak (Polinomial) dalam bentuk kuadrat dengan pola $ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$ dapat dilakukan dengan metode bersusun apabila bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ tidak dapat dipaktorkan. Namun apabila pembagi dalam bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan, maka perhitungannya dapat dilakukan dengan metode Horner. Misalkan, suatu suku banyak $f(x)$ dibagi $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dan dapat difaktorkan menjadi $(ax - p_1)(x - p_2)$. Maka, pembagian polinomial tersebut dapat dilaksanakan dengan mengikuti tahapan tahapan berikut.

1. Suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(ax - p_1)$, sedemikian hingga $f(x) = (ax - p_1) \cdot h_1(x) + f\left(\frac{p_1}{a}\right)$ dengan $h_1(x) = \frac{h(x)}{a}$
2. Hasil bagi $h(x)$ dibagi $(x - p_2)$, sedemikian sehingga diperoleh formula $h_1(x) = (x - p_2) \cdot h_2(x) + h_1(p_2)$.
3. Mensubstitusikan $h_1(x) = (x - p_2) \cdot h_2(x) + h_1(p_2)$ ke dalam $f(x) = (ax - p_1) \cdot h_1(x) + f\left(\frac{p_1}{a}\right)$.

Dihasilkan suatu formula atau persamaan sebagai berikut;

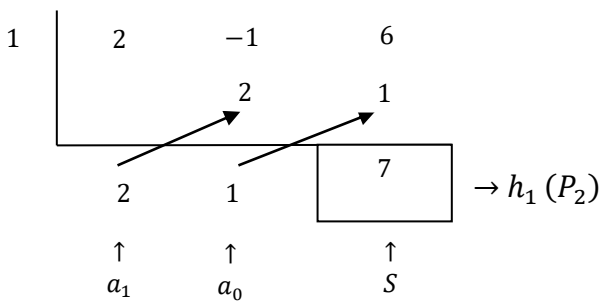
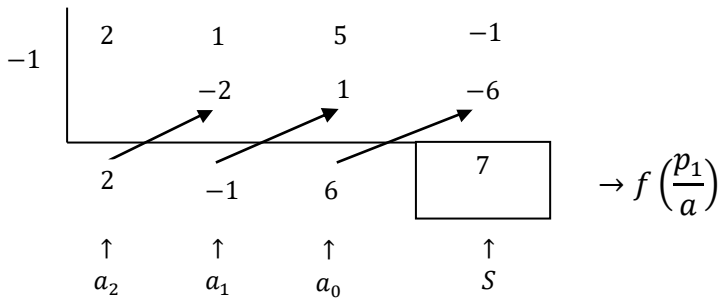
$f(x) = (ax - p_1)(ax - p_2) \cdot h_2(x) + h_1(p_2) + \left[(ax - p_1) \cdot h_1(p_2) + f\left(\frac{p_1}{a}\right)\right]$. Dikarenakan bahwa $(ax - p_1)(ax - p_2) = ax^2 + bx + c$, maka dapat ditulis menjadi $f(x) = ax^2 + bx + c \cdot h_2(x) + \left[(ax - p_1) \cdot h_1(p_2) + f\left(\frac{p_1}{a}\right)\right]$. Dimana $h_2(x)$ merupakan $h(x)$ atau hasil bagi dan $\left[(ax - p_1) \cdot h_1(p_2) + f\left(\frac{p_1}{a}\right)\right]$ merupakan $s(x)$ atau sisa pembagian.

Contoh 13 :

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari suku banyak $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 1$ terhadap $(x^2 - 1)$ dengan menggunakan metode Horner!

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan persoalan ini, maka terlebih dahulu $x^2 - 1$ difaktorkan. Sehingga diperoleh faktornya yaitu $(x + 1)(x - 1)$, dengan menggunakan kerangka penyelesaian dengan metode horner penyelesaian soal dapat dilakukan sebagai berikut.



Berdasarkan kerangka pembagian metode horner tersebut diperoleh hasil bagi $H(x) = 2x + 1$ dan sisa bagi

$$\begin{aligned}
 S(x) &= (ax - p_1) (h_1(p_2)) + f\left(\frac{p_1}{a}\right) \\
 &= (x + 1) (7) + 7 \\
 &= 7x + 7 + 7 \\
 &= 7x
 \end{aligned}$$

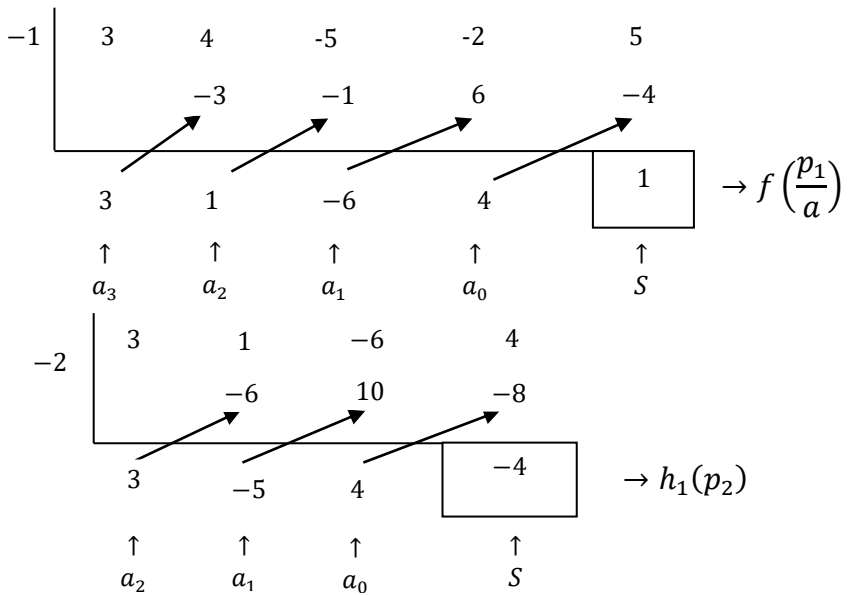
Jadi $(2x + 1)$ merupakan hasil bagi dan $7x$ merupakan sisa pembagian.

Contoh 14 :

Jika suku banyak $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ dibagi dengan $(x^2 + 3x + 2)$. Gunakan metode horner untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari bentuk polinomial tersebut.

Penyelesaian :

$(x^2 + 3x + 2)$ difaktorkan menjadi $(x + 1) (x + 2)$, dengan menggunakan bagan metode pembagian sintetik maka;



Berdasarkan kerangka penyelesaian metode horner tersebut perolehan hasil bagi $H(x) = 3x^2 - 5x + 4$ dan sisa pembagian

$$\begin{aligned}
 S(x) &= (ax - p_1) (h_1(p_2)) + f\left(\frac{p_1}{a}\right) \\
 &= (x + 1)(-4) + 1 \\
 &= (x + 1)(-4) + 1 \\
 &= -4x - 4 + 1 \\
 &= -4x - 3
 \end{aligned}$$

Dengan demikian $(3x^2 - 5x + 4)$ merupakan $H(x)$ dan $-4x - 3$ merupakan $S(x)$ dari pembagian polinomial $f(x)$ terhadap $x^2 + 3x + 2$.

d. Pemaktoran Suku Banyak

Teorema faktor dimanfaatkan dalam mencari faktor linear pada suku banyak tertentu. Berikut ini disajikan konsep formula dari teorema faktor.

Apabila $f(x)$ adalah suatu suku banyak (polinom), maka $(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$

Teorema yang disajikan sebelumnya memberi informasi bahwa:

1. Apabila $(x-k)$ adalah faktor dari persamaan suku banyak $f(x)$ maka $f(k)=0$
2. Jika $f(k)=0$ maka $(x-k)$ merupakan faktor dari persamaan suku banyak $f(x)$.

Untuk memahami lebih jauh tentang aplikasi dari teorema faktor, dapat dicermati contoh-contoh yang diberikan berikut.

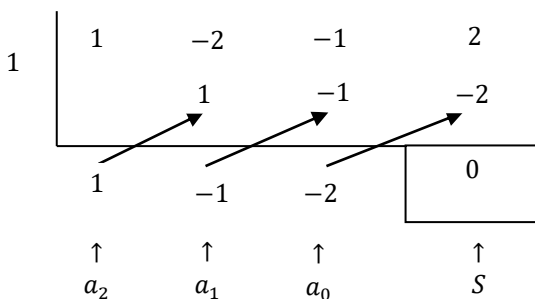
Contoh 15.

Suatu polinomial berderajat tiga dinyatakan sebagai berikut: $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Tentukan faktor-faktor dari polinomial tersebut dengan menggunakan metode horner!

Penyelesaian :

Apabila $(x - k)$ merupakan faktor suku banyak $x^3 - 2x^2 - x + 2$, maka k merupakan pembagi dari 2, yaitu ± 1 dan ± 2 . Kemudian, dicoba nilai-nilai tersebut. Misalkan dicoba dengan metode horner dengan pembagi $(x - 1)$,

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $f(x)$ dibagi dengan $(x - 1)$



Berhubung karena $f(1) = 0$, maka $(x - 1)$ menjadi penyelesaian dari persamaan bentuk polinomial $(3x^2 - 5x + 4)$ sedangkan penyelesaian dari bentuk aljabar $x^2 - x - 2$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

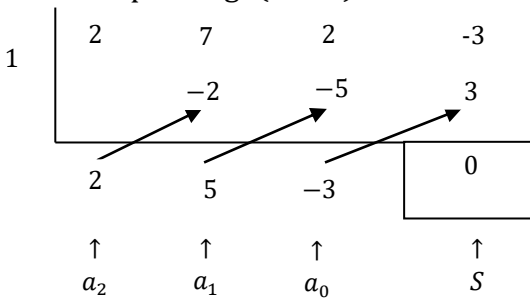
Jadi faktor dari $x^3 - 2x^2 - x + 2$ adalah $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Contoh 16.

Dengan menggunakan metode horner, tentukanlah faktor-faktor dari suku banyak $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

Penyelesaian :

Dengan $(x - k)$ merupakan faktor suku banyak dari $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$, maka k dapat dijadikan sebagai pembagi dari 3, yaitu ± 1 dan ± 3 . Perolehan nilai yang ada tersebut dijadikan menjadi objek ujicoba dengan metode horner melalui pembagi $(x + 1)$.



$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x + 1)(2x^2 + 5x - 3)$$

$$= (x + 1)(x + 3)(2x - 1)$$

Berdasarkan perhitungan yang dilakukan dengan metode horner sebelumnya maka $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ memiliki faktor faktor $(x + 1)(x + 3)(2x - 1)$.

9.5 Teorema Sisa

Teorema sisa merupakan suatu cara atau metode yang dapat digunakan dalam menentukan nilai sisa bagi dari suatu persamaan suku banyak. Dalam teorema sisa dapat diterapkan pada suku banyak dengan derajat tertentu terhadap pembagi dalam bentuk $(x - k)$ dan $(ax + b)$. Berikut ini diuraikan dengan lebih jelas penerapan dari teorema sisa.

9.5.1 Pembagi berbentuk $(x-k)$

Secara umum, suku banyak $f(x)$ dengan pembagi $P(x)$ serta memberikan hasil bagi $H(x)$ dan sisa bagi $S(x)$, maka akan diperoleh hubungan: $f(x) = (x - k) \cdot H(x) + S(x)$. Dengan pembagi berbentuk $(x-k)$ maka sisa bagi yang akan diperoleh akan membentuk suatu konstanta (Zaelani, Cunayah and Irawan, 2006). Sisa pembagian suku banyak berdasarkan teorema sisa dirumuskan sebagai berikut.

Jika suku banyak (polinomial) $f(x)$ berderajat n dibagi oleh $(x-k)$ maka sisa bagi $S(x)$ dapat diperoleh melalui $S = f(x)$

Contoh 17.

Diberikan $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$ dibagi oleh $P(x) = x - 3$. Dengan menggunakan teorema siswa, maka sisa bagi $f(x)$ terhadap $P(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$P(x) = x - 3 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Dengan menggunakan konsep $S = f(x)$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$$

$$S = f(3) = 3^3 - 2(3)^2 - 3 - 5$$

$$S = 27 - 2(9) - 3 - 5$$

$$S = 27 - 18 - 3 - 5$$

$$S = 27 - 26$$

$$S = 1$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa sisa bagi $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$ terhadap $P(x) = x - 3$ adalah 1.

Contoh 18.

Diberikan $f(x) = 2x^3 + 2x + 6$ dan $P(x) = x + 3$. Dengan menggunakan teorema sisa, maka sisa bagi dari pembagian $f(x)$ terhadap $P(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$P(x) = x + 3 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3.$$

Dengan menggunakan konsep $S = f(x)$

$$f(x) = 2x^3 + 2x + 6$$

$$S = f(x) = 2(-3)^3 + 2(-3) + 6$$

$$S = f(-3) = 2(-27) + (-6) + 6$$

$$S = f(-3) = -54 - 6 + 6$$

$$S = f(-3) = -54$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa sisa bagi $f(x) = 2x^3 + 2x + 6$ terhadap $P(x) = x + 3$ adalah -54.

9.5.2 Pembagi berbentuk $(ax+b)$

Suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $g(x)$ dalam bentuk $(ax+b)$ secara umum akan memberikan hasil bagi $\frac{H(x)}{a}$ dan memberikan sisa bagi $s(x)$ yang dapat dinyatakan dengan hubungan $f(x) = (ax + b) \cdot \frac{H(x)}{a} + S(x)$. Sisa pembagian $S(x)$ dapat ditentukan dengan formula berikut.

Jika suku banyak $f(x)$ dengan derajat n dibagi oleh pembagi $(ax-b)$ maka sisa bagi $S(x)$ diperoleh melalui $S = f(\frac{b}{a})$

Contoh 19.

Diberikan suku banyak $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$ dengan pembagi $g(x) = 2x - 1$. Maka $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Berdasarkan formula maka $S = f(\frac{b}{a})$

$$\Leftrightarrow S = f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 10$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) + 7\left(\frac{1}{4}\right) - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 10$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} + \frac{7}{4} - \frac{8}{2} + 10$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{16}{4} + \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{48}{4} - \frac{16}{4}$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{4}$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa sisa bagi $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 10$ terhadap $g(x) = 2x - 1$ adalah 8.

Contoh 20.

Sebagai contoh penerapan dapat diperhatikan penyelesaian

penentuan sisa hasil bagi dari persamaan suku banyak berikut.

Diberikan suku banyak $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$ dengan pembagi

$g(x) = 2x + 3$. Maka $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. berdasarkan formula

maka $S = f\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\Leftrightarrow S = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{27}{8}\right) + 3\left(\frac{9}{4}\right) - 4\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{54}{8} + \frac{27}{4} - \left(-\frac{12}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{54}{8} + \frac{54}{8} + \frac{48}{8}$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{48}{8}$$

$$\Leftrightarrow S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa sisa bagi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$ terhadap $g(x) = 2x + 3$ adalah 6.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, M. (2016) 'Upaya Meningkatkan Prestasi Belajar Siswa dalam Menyelesaikan Pembagian Suku Banyak dengan Metode Pembagian Sintetik di Kelas XI IPA Semester IV Taman Madya (SMA) Tamansiswa Medan T.P 2009/2010', *Jurnal Education and development STKIP Tapanuli Selatan*, 1(4), pp. 32–40. Available at: <http://journal.ipts.ac.id/index.php/ED/article/view/260/149%0A>.
- Istiqomah (2020) *Polinomial (Suku Banyak) Matematika Peminatan Kelas XI*. Jakarta: Kemendikbud.
- Muslihun (2022) *KSN Kompetensi Sains Nasional Matematika SMP*. Jakarta: Gramedia Widya Sarana Indonesia.
- Shadiq, F. (2023) *Suku Banyak*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Dan Menengah Pusat Pengembangan Penataran Guru (PPPG) Matematika.
- Wulandari, Y. (2011) *Cerdas Menghafal Matematika SMA*. Pamulang: Scientific Press.
- Zaelani, A., Cunayah, C. and Irawan, E.I. (2006) *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika*. Bandung: Yrama Widya.

BAB 10

MATRIKS

Oleh Hasniati

10.1 Pendahuluan

Matriks adalah konsep fundamental dalam matematika yang menyajikan kumpulan data atau elemen dalam bentuk tabel dengan baris dan kolom. Ditemukan pertama kali oleh matematikawan Inggris, Arthur Cayley, pada abad ke-19, matriks telah menjadi alat yang sangat berharga dalam berbagai bidang ilmu, termasuk aljabar linear, statistika, ilmu komputer, dan fisika.

Istilah "matriks" berasal dari bahasa Latin "mater," yang berarti "induk" atau "ibu." Matriks digunakan untuk merepresentasikan informasi dalam sistem persamaan linear, transformasi geometris, dan banyak aplikasi lainnya. Keberagaman penggunaan matriks membuatnya menjadi salah satu konsep matematika yang paling serbaguna dan luas penggunaannya.

Matriks dapat dimanfaatkan dalam menyelesaikan suatu permasalahan menjadi lebih efisien. Selain itu, pemahaman mengenai matriks juga dapat diterapkan dalam ranah ekonomi dan bisnis dalam berbagai konteks. Penerapan matriks membantu dalam mengoptimalkan fungsi yang melibatkan banyak variabel, memungkinkan pemecahan masalah yang lebih efektif (Widayat, 2021).

10.2 Definisi Matriks

Suatu matriks didefinisikan sebagai suatu susunan angka-angka berbentuk segiempat. Angka pada matriks disebut elemen atau anggota matriks. Bentuk umum suatu matriks dapat ditulis sebagai berikut(Anton and Rorres, 2013).

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks dinyatakan dengan huruf besar (huruf kapital) yang dicetak tebal (*bold*), sedangkan anggota suatu matriks A berupa bilangan riil dinotasikan dengan $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{rs}$. Anggota-anggota matriks ini dituliskan di antara dua tanda kurung () atau dapat juga tanda kurung []. Indeks yang ada pada notasi anggota matriks a_{ij} menunjukkan anggota matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j . Misalnya anggota a_{35} dapat diartikan i bernilai 3 dan j bernilai 5, yang menunjukkan anggota pada baris ke-3 dan kolom ke-5. Karena a_{ij} disimbolkan sebagai anggota suatu matriks, matriks P juga sering dituliskan dalam notasi yang lebih singkat:

(a_{ij}) atau $[a_{ij}]$

Dimana $i=1,2,3,\dots,r$ dan $j=1,2,3,\dots,s$.

Ukuran suatu matriks didasarkan pada banyaknya baris dan kolomnya. Suatu matriks dengan jumlah baris sebanyak r dan jumlah kolomnya s dapat ditulis sebagai matriks berukuran $r \times s$ yang dibaca matriks berdimensi $r \times s$. Bila $r = s$, matriksnya disebut dengan matriks bujur sangkar. Ukuran matriks kadangkala ditulis di bagian sebelah kanan bawah kurung tutupnya (Widayat, 2021).

Contoh 10.1:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

Matriks P memiliki jumlah baris sebanyak 3 dan jumlah kolom sebanyak 5. Dimensi matriks P adalah 3×5 .

Contoh 10.2: Matriks B berukuran 3×3 dan merupakan matriks bujur sangkar.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Jika C dan D adalah matriks yang mempunyai ukuran yang sama dan nilai pada anggota yang berpadanan sama maka $C=D$ (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.3:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$C = E$ akan tetapi $C \neq D$ dan $D \neq E$.

Sebuah matriks dengan 1 kolom disebut matriks kolom (atau biasa disebut vektor kolom) dapat ditulis sebagai matriks K dan sebuah matriks dengan 1 baris disebut matriks baris (atau vektor baris) dapat ditulis sebagai matriks B (Widayat, 2021):

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} \quad B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s]$$

Contoh 10.4:

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad G = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 3]$$

Matriks F adalah matriks kolom (atau vektor kolom) berukuran 3×1 dan matriks G adalah matriks baris (atau vektor baris) berukuran 1×4 .

10.3 Bentuk Matriks

Dalam pembahasan ini, kita akan menjelajahi beberapa jenis matriks yang mendasar. Ada tiga jenis matriks yang menjadi titik fokus yaitu matriks diagonal, matriks segitiga, matriks identitas, dan matriks nol.

10.3.1 Matriks Diagonal

Suatu matriks bujur sangkar yang semua anggota selain diagonal-utamanya nol disebut matriks diagonal, dapat ditulis:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \cdots & p_{2s} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & \cdots & p_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

10.3.2 Matrik-matriks segitiga

Sebuah matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol disebut sebagai segitiga bawah, dan matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol disebut sebagai segitiga atas(Mursyidah, 2017). Matriks yang memenuhi kriteria baik sebagai segitiga bawah atau segitiga atas disebut sebagai matriks segitiga. Matriks segitiga atas dapat ditulis:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1s} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2s} \\ 0 & 0 & p_{33} & \cdots & p_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix}$$

Dan matriks segitiga bawah dapat ditulis

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix}$$

10.3.3 Matriks Identitas

Matriks bujur sangkar yang memiliki nilai 1 pada setiap elemen diagonal utamanya dan nilai 0 pada seluruh elemen lainnya disebut sebagai matriks identitas, yang umumnya

dinotasikan dengan simbol I (Mursyidah, 2017). Notasi umum untuk matriks identitas berukuran $r \times r$ adalah I_r .

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{dan seterusnya.} \\ I_2 & I_3 & I_4 & \end{matrix}$$

Untuk menjelaskan sifat operasi aritmatika matriks identitas, mari kita perhatikan efek perkalian matriks identitas dengan matriks P berukuran 2×3 pada setiap sisi. Mengalikan dari kanan dengan matriks identitas 3×3 menghasilkan.

$$PI_3 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} = P$$

Dan mengalikan dari kiri dengan matriks identitas 2×2 ,

menghasilkan

$$I_2 P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} = P$$

Jika P adalah suatu matriks berukuran $r \times s$, maka berlaku (Anton and Rorres, 2013):

$$PI_s = P \quad \text{dan} \quad I_r P = P$$

10.3.4 Matriks Nol

Matriks yang seluruh elemennya nol disebut sebagai matriks nol. Matriks nol dapat ditulis (Anton and Rorres, 2013):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Dengan asumsi dimensi matriks sama sehingga operasi yang dinyatakan dapat dilakukan, maka berlaku aturan-

aturan aritmetika matriks berikut ini berikut (Anton and Rorres, 2013).

- $P+0=0+P=P$
- $P-0=0-P=P$
- $P-P=P+(-P)=0$
- $0P=0$
- Jika $sP=0$, maka $s=0$ atau $P=0$

10.4 Operasi Matriks

Dalam kehidupan, matriks menjadi suatu konsep yang mendalam dan bermanfaat, tidak hanya digunakan sebagai alat representasi data tetapi suatu matriks juga dapat dioperasikan dengan matriks lain. Melalui operasi matriks, kita dapat menggabungkan, mengubah, dan menganalisis data yang terstruktur dalam suatu sistem matriks. Terdapat berbagai jenis operasi matriks, mulai dari operasi dasar seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian, hingga operasi lanjutan seperti transpose, penentuan determinan dan invers matriks. Setiap operasi memiliki peran dan kegunaannya sendiri dalam pemecahan masalah matematika atau penerapan dalam berbagai bidang ilmu.

10.4.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Operasi penjumlahan dapat dilakukan pada dua buah matriks apabila keduanya memiliki ukuran yang sama. Operasi penjumlahan pada matriks dilakukan berdasarkan penjumlahan anggota-anggota yang berpadanan. Dalam konteks ini, berpadanan berarti anggota-anggota tersebut berada pada baris dan kolom yang sama. Dengan kata lain, jika kita memiliki dua matriks (Anton and Rorres, 2013):

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & p_{r3} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & q_{r2} & q_{r3} & \cdots & q_{rs} \end{bmatrix}$$

maka

$$P+Q = \begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12} & p_{13}+q_{13} & \cdots & p_{1s}+q_{1s} \\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22} & p_{23}+q_{23} & \cdots & p_{2s}+q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}+q_{r1} & p_{r2}+q_{r2} & p_{r3}+q_{r3} & \cdots & p_{rs}+q_{rs} \end{bmatrix}$$

Hal yang sama diberlakukan untuk pengurangan matriks yaitu:

$$P-Q = \begin{bmatrix} p_{11}-q_{11} & p_{12}-q_{12} & p_{13}-q_{13} & \cdots & p_{1s}-q_{1s} \\ p_{21}-q_{21} & p_{22}-q_{22} & p_{23}-q_{23} & \cdots & p_{2s}-q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}-q_{r1} & p_{r2}-q_{r2} & p_{r3}-q_{r3} & \cdots & p_{rs}-q_{rs} \end{bmatrix}$$

Contoh 10.5: Hitung P+Q dan P-Q dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P+Q = \begin{bmatrix} 2+1 & -2+6 \\ 1+4 & 3+(-2) \\ 8+1 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P-Q = \begin{bmatrix} 2-1 & -2-6 \\ 1-4 & 3-(-2) \\ 8-1 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

10.4.2 Perkalian Skalar

Sebuah matriks dengan ukuran berapa pun dapat dikenakan operasi perkalian dengan suatu bilangan skalar. Hasil perkalian antara matriks dengan skalar adalah matriks baru yang setiap anggotanya diperoleh dari perkalian bilangan skalar tersebut dengan anggota-anggota pada matriks awal. Perkalian skalar c dengan matriks P dapat ditulis (Anton and Rorres, 2013)

$$cP = \begin{bmatrix} cp_{11} & cp_{12} & \cdots & cp_{1n} \\ cp_{21} & cp_{22} & \cdots & cp_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cp_{m1} & cp_{m2} & \cdots & cp_{mn} \end{bmatrix}$$

10.4.3 Perkalian Matriks

Perkalian dua buah matriks dapat dilakukan apabila suatu kondisi tertentu dipenuhi. Misalnya, untuk menghitung operasi perkalian antara dua matriks P dan Q, kita harus memastikan bahwa jumlah kolom pada matriks P sama dengan jumlah baris pada matriks Q (Widayat, 2021).

Definisi: Jika matriks P memiliki ukuran $r \times t$ dan matriks Q memiliki ukuran $t \times s$, maka hasil perkalian PQ adalah matriks berukuran $r \times s$. Elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut: untuk elemen pada baris i dan kolom j dari matriks PQ, kita mengambil baris i dari matriks P dan kolom j dari matriks Q. Kemudian, kita mengalikan elemen yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersamaan, dan menjumlahkan hasilnya (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.6: Hitung perkalian skalar $2P$ dan perkalian matriks PQ dengan

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 3 \times 4$

Perkalian Skalar

$$2P = 2 \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 12 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks P 2×3 dan ukuran matriks Q 3×4 sehingga perkalian matriks PQ yang dihasilkan berukuran 2×4 berikut:

$$PQ = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 37 & 22 & 13 \\ 4 & -2 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

2×4

Untuk memudahkan pemahaman, perhatikan langkah untuk memperoleh elemen matriks PQ pada baris ke-1 kolom ke-1. Ambil baris ke-1 dari matriks P yaitu -1, -2, 6 dan kolom ke-1 dari matriks Q yaitu 2, 0, 1. Selanjutnya mengalikan elemen-elemen yang berpadanan dan menjumlahkan hasilnya sehingga diperoleh 4.

$$(-1).2 + (-2).0 + 6.1 = -2 + 0 + 6 = 4.$$

10.4.4 Transpose Matriks

Transpose matriks diperoleh dengan mengganti baris menjadi kolom dan sebaliknya. Dengan kata lain, dalam transpose matriks elemen-elemen pada baris pertama matriks akan ditukar dengan kolom pertama, baris kedua dengan kolom kedua, dan seterusnya. Notasi yang umum digunakan untuk menuliskan transpose dari matriks P adalah P^T (Widayat, 2021). Definisi: Jika P adalah matriks $r \times s$ yang mana m dan n dapat berbeda, maka transpose dari matriks P, disimbolkan dengan P^T , adalah matriks $s \times r$ yang diperoleh dengan menukar posisi baris dan kolom dari P. Dengan kata lain, kolom pertama dari P^T adalah baris pertama dari P, kolom kedua dari P^T adalah baris kedua dari P, dan seterusnya (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.7: Transpose matriks

Jika $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix}$, maka $P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} \end{bmatrix}$

3×4 4×3

Jika $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, maka $P^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

3×2 2×3

Teorema berikut ini mencantumkan sifat utama dari transpose matriks.

Teorema: Jika ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sama sedemikian sehingga operasi yang dinyatakan bisa dilakukan, maka

- a. $(P^T)^T = P$
- b. $(P+Q)^T = P^T + Q^T$
- c. $(P-Q)^T = P^T - Q^T$
- d. $(kP)^T = kP^T$
- e. $(PQ)^T = Q^T P^T$

10.4.5 Trace dari Suatu Matriks Bujur Sangkar

Trace P dinotasikan dengan $\text{tr}(P)$, yang merupakan hasil penjumlahan dari elemen-elemen pada diagonal utama P. Trace P terdefinisi jika P adalah matriks bujur sangkar (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.8 : Perhatikan matriks P dan trace-nya.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(P) = 2 + 5 + 3 = 10$$

10.4.6 Aturan Aritmetika Matriks

Dalam matematika, aturan aritmetika adalah serangkaian pedoman yang mengatur bagaimana operasi aritmetika

dilakukan pada berbagai jenis objek matematika, termasuk bilangan bulat, pecahan, dan matriks. Aturan aritmetika mengizinkan kita untuk menjalankan operasi dasar seperti penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dengan konsisten dan sesuai dengan aturan-aturan yang telah ditetapkan. Pemahaman yang kuat tentang aturan aritmetika memungkinkan kita untuk melakukan manipulasi matematika dengan akurat dan efisien.

Dalam bagian ini akan dibahas berbagai aturan aritmetika yang berkaitan dengan matriks yang dapat digunakan dalam menyelesaikan berbagai soal yang berkaitan dengan operasi matriks.

Teorema: Jika P , Q , R adalah matriks berukuran sama dan s , t adalah skalar sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah sah (Anton and Rorres, 2013).

- a. $P+Q = Q+P$ *(komutatif penjumlahan)*
- b. $P+(Q+R)=(P+Q)+R$ *(assosiatif penjumlahan)*
- c. $P(QR)=(PQ)R$ *(assosiatif perkalian)*
- d. $P(Q+R)=PQ+PR$ *(hukum distributif kiri, hal ini berlaku juga untuk pengurangan)*
- e. $(Q+R)P=QP+RP$ *(hukum distributif kanan, hal ini berlaku juga untuk pengurangan)*
- f. $s(P+Q)=sP+sQ$ *(hal ini berlaku juga untuk pengurangan)*
- g. $(s+t)P=sP+TP$ *(hal ini berlaku juga untuk pengurangan)*
- h. $s(tP)=(st)P$
- i. $s(PQ)=(sP)Q=P(sQ)$

10.5 Invers Matriks

10.5.1 Definisi Invers Matriks

Definisi: Apabila P merupakan matriks bujur sangkar dan terdapat suatu matriks Q dengan ukuran yang sama sehingga hasil perkalian $PQ = QP = I$, maka P disebut memiliki invers (*invertible*) dan Q disebut invers dari P (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.9: Matriks

$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan invers dari $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ karena

perkalian

$$QP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ dan}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Invers dari suatu matriks P dinotasikan sebagai P^{-1} . Invers matriks dapat dihitung dengan menggunakan rumus yang ada dalam teorema berikut.

Teorema: Matriks

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

disebut *invertible* jika $ad-bc \neq 0$ (disebut determinan), dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$P^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Untuk membuktikan kebenaran invers matriks dapat menggunakan rumus $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.10: Periksa apakah matriks berikut *invertible*. Jika ya, tentukan inversnya!

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Determinan dari matriks P yaitu $\det(P) = 6(4) - 9(3) = -3$, yang bukan nol. Oleh karena itu, P *invertible* dan inversnya adalah

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Pembuktian $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ ditinggalkan sebagai latihan.

Matriks Q tidak invertible karena $\det(Q) = 3(4) - 6(2) = 0$.

Teorema: Jika kedua matriks P dan Q adalah matriks yang *invertible* dan berukuran sama, maka PQ juga *invertible* dan (Anton and Rorres, 2013)

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

10.5.2 Peringkat Suatu Matriks

Definisi: Jika P adalah suatu matriks bujur sangkar, maka pangkat tak-negatif dari P dapat didefinisikan sebagai

$$P^0 = I \quad P^n = P \cdot P \cdots P \quad (n \text{ faktor, } n \text{ bilangan bulat } > 0)$$

Dengan kata lain, jika P *invertible*, maka pangkat negatif dapat didefinisikan sebagai

$$P^{-n} = (P^{-1})^n = P^{-1} \cdot P^{-1} \cdots P^{-1} \quad (n \text{ faktor, } n \text{ bilangan bulat})$$

Karena definisi-definisi ini sejalan dengan yang untuk bilangan real, hukum-hukum biasa dari eksponen nonnegatif berlaku seperti (Anton and Rorres, 2013)

$$P^r P^s = P^{r+s} \quad \text{dan} \quad (P^r)^s = P^{rs}$$

10.6 Determinan Matriks

Determinan matriks adalah nilai skalar yang diperoleh melalui operasi pada elemen-elemen spesifik dalam matriks tersebut. Notasi yang digunakan untuk menunjukkan determinan matriks P adalah $\det(P)$ atau $|P|$. Determinan hanya dapat dihitung untuk matriks yang berbentuk bujur sangkar. Cara untuk menghitung determinan suatu matriks adalah sebagai berikut: Anggap kita memiliki sebuah matriks dengan ukuran 2×2 :

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

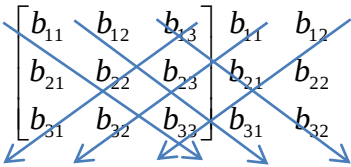
maka determinannya adalah (Widayat, 2021):

$$|P| = ad - bc \quad (\text{hasil berupa skalar})$$

Berdasarkan rumus di atas, dapat disimpulkan bahwa determinan matriks bujur sangkar berukuran 2×2 diperoleh dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama dan kemudian mengurangi dengan hasil perkalian elemen-elemen diagonal lainnya. Bagaimana dengan determinan dari sebuah matriks berukuran 3×3 . Misalkan diberikan sebuah matriks 3×3 berikut(Widayat, 2021):

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

dapat ditulis



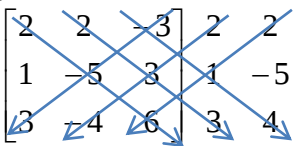
maka determinannya akan bernilai:

$$|B| = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}$$

Contoh 10.11: Hitung determinan dari

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$B =$


$$|B| = -60 + 18 - 12 - 45 + 24 - 12 = -87$$

10.6.1 Perluasan Kofaktor (Ekspansi Laplace)

Pada bagian sebelumnya telah dibahas cara menghitung determinan matriks 2×2 dan 3×3 . Jika ingin menghitung determinan matriks dengan ukuran yang lebih tinggi, cara tersebut tidak dapat dilakukan. Dalam menghitung determinan matriks 4×4 , 5×5 dan seterusnya dapat menggunakan perluasan kofaktor(Anton and Rorres, 2013).

Untuk memahami bagaimana perluasan kofaktor diterapkan, perhatikan determinan matriks 3×3 berikut:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan B di atas dapat dilihat sebagai hasil penjumlahan dari tiga suku, di mana setiap suku merupakan hasil perkalian antara elemen dari baris pertama dengan sebuah determinan matriks 2×2 . Proses dekomposisi dari $|B|$ ini adalah yang menjelaskan dekomposisi Laplace dari sebuah determinan. Determinan matriks 2×2 tidak ditentukan secara acak, melainkan diturunkan dengan menggunakan aturan tertentu. Determinan matriks 2×2 yang pertama adalah (Widayat, 2021):

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Ini adalah determinan yang merupakan bagian dari $|B|$ yang diperoleh dengan menghapus baris pertama dan kolom pertama dari $|B|$. Bagian ini disebut sebagai minor dari elemen a_{11} , yaitu elemen yang telah dihilangkan baris dan kolomnya, dan disebut minor atau dapat ditulis M_{11} . Minor M_{ij} juga dapat digunakan untuk mengindikasikan determinan submatriks dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j . Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa dua determinan matriks 2×2 lainnya adalah minor M_{12} dan minor M_{13} atau (Widayat, 2021):

$$M_{11} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

Suatu konsep yang erat kaitannya dengan minor adalah kofaktor. Kofaktor dinotasikan dengan C_{ij} dan didefinisikan sebagai minor dengan disertai tanda aljabar tertentu (mungkin minus atau plus). Penentuan tanda pada kofaktor dapat dirumuskan menjadi:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dalam rumus kofaktor dapat dilihat bahwa $(-1)^{i+j}$ akan bernilai positif bila $i+j$ genap dan bernilai negatif bila $i + j$ ganjil (Anton and Rorres, 2013).

Contoh 10.12: Tentukan M_{12} dan C_{12} dari matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-3) = 3$$

Dengan menggunakan metode Laplace untuk ekspansi pada baris ke-1, suatu determinan matriks 3×3 dapat dihitung dengan rumus:

$$|B| = b_{11}C_{11} + b_{12}C_{12} + b_{13}C_{13}$$

Contoh 10.13: Tentukan determinan dari matriks B berikut

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 12 = -18$$

$$C_{12} = 3 \quad (\text{dari contoh sebelumnya})$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 15 = 11$$

$$|B| = b_{11}C_{11} + b_{12}C_{12} + b_{13}C_{13}$$

$$= 2(-18) + 2(3) + (-3)11 = -36 + 6 - 33 = -63$$

Selain ekspansi pada baris ke-1 dilakukan dalam metode Laplace, dapat juga dilakukan baris kedua atau yang lain bahkan dapat pula yang diuraikan adalah kolomnya, yaitu kolom satu atau kolom dua atau kolom yang lain.

Teorema: Determinan suatu matriks B berukuran $n \times n$ bisa dihitung dengan menjumlahkan hasil kali anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya yaitu

untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$|B| = b_{1j}C_{1j} + b_{2j}C_{2j} + \dots + b_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi Laplace pada kolom ke - j)

dan

$$|B| = b_{i1}C_{i1} + b_{i2}C_{i2} + \dots + b_{in}C_{in}$$

(ekspansi Laplace pada baris ke - i) (Anton and Rorres, 2013)

Contoh 10.14: Hitung determinan matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Menggunakan ekspansi Laplace pada kolom ke-3

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 6$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 3) = -7$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9$$

$$\begin{aligned} |B| &= b_{13}C_{13} + b_{23}C_{23} + b_{33}C_{33} \\ &= 0(6) + (-3)(-7) + 2(-9) = 21 - 18 = 3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode Laplace pada ekspansi baris atau kolom apapun akan menghasilkan determinan yang sama.

Teorema: Jika P adalah matriks bujur sangkar dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional maka $\det(P) = 0$ (Anton and Rorres, 2013).

Contoh: Determinan P adalah 0 karena matriks P proporsional. Anggota pada kolom 2 matriks P adalah 2 kali kolom 1-nya .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -12 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal.

1. Diketahui matriks

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Hitung berikut ini jika memungkinkan (Jika tidak, tuliskan alasannya)!

- | | | |
|----------|---------|------------|
| a. $P+Q$ | d. PQ | g. $3Q+5P$ |
| b. $P-Q$ | e. QR | h. Q^T-R |
| c. $2P$ | f. RP | i. $RQ-P$ |

2. Hitung determinan matriks berikut:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. Dengan menggunakan metode Laplace hitung determinan matriks

a. $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 7 & -2 & 6 \\ -6 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

DAFTAR PUSTAKA

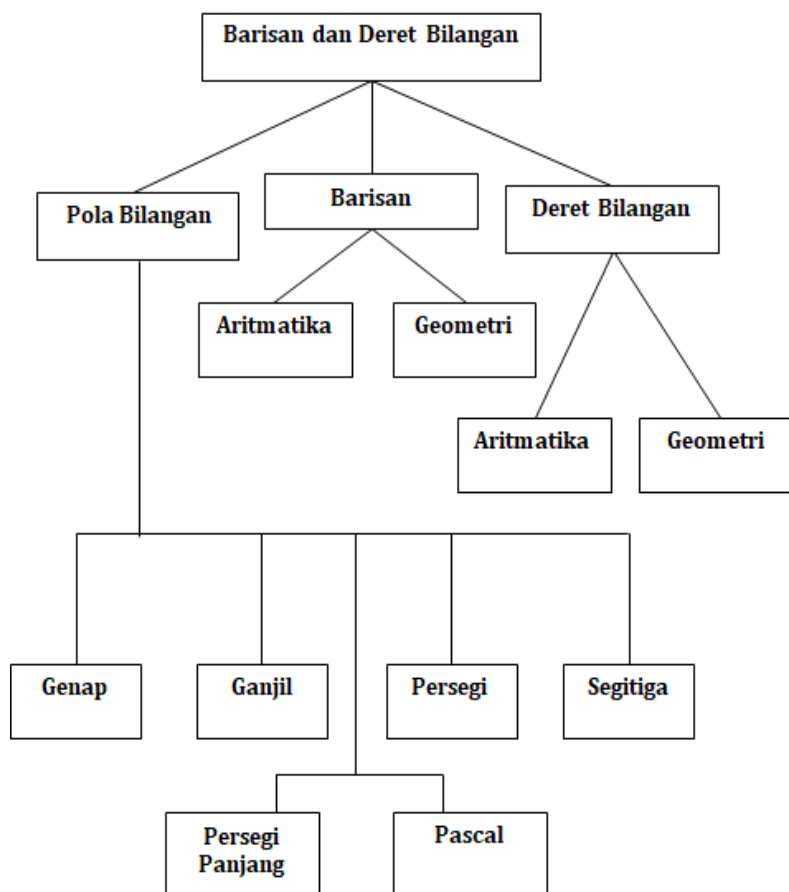
- Anton, H. (Drexel U. and Rorres, C. (University of P. (2013) *Elementary Linear Algebra: Application Version*. 11th editi. WileyPLUS.
- Mursyidah, H. (2017) 'ALGORITMA POLINOMIAL MINIMUM UNTUK MEMBENTUK MATRIKS DIAGONAL DARI MATRIKS PERSEGI', *Journal of Materials Processing Technology*, 1(1), pp. 1–8. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cirp.2016.06.001><http://dx.doi.org/10.1016/j.powtec.2016.12.055><https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.02.006><https://doi.org/10.1016/j.matlet.2019.04.024><https://doi.org/10.1016/j.matlet.2019.127252><http://dx.doi.org/10.1016/j.matlet.2019.127252>
- Widayat, W. (2021) 'ESPA4222 Edisi 3 Dr. Wahyu Widayat, M.Ec.', in *Matematika Ekonomi dan Bisnis (Edisi 3)*. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka, pp. 1–66. Available at: <https://pustaka.ut.ac.id/lib/wp-content/uploads/pdfmk/ESPA422203-M1.pdf>.

BAB 11

BARISAN DAN DERET

Oleh Mohammad Ardani Samad

Diagram Alur



11.1 Barisan, Pola, Deret Bilangan Dan Notasi

Sigma.

1. BARISAN BILANGAN

Untuk memahami pengertian suatu barisan bilangan, perhatikan contoh urutan bilangan berikut ini :

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a) 2, 4, 6, 8, 10, | d) 1, 4, 9, 16, 25, |
| b) 3, 6, 9, 12, 15, | e) 3, 2, 5, 4, 7, 8, |
| c) 1, 3, 5, 7, 9, | d) 12, 15, 13, 18, 25, |

Urutan bilangan – bilangan pada contoh a, b, c, dan d di atas mempunyai aturan tertentu, misalnya pada contoh a) dengan urutan bilangan 2, 4, 6, 8, 10,.. mempunyai aturan tertentu adalah ditambahkan dengan 2. Sedangkan pada contoh c) dengan urutan 3, 6, 9, 12, 15,... mempunyai aturan tertentu adalah ditambah dengan 3. Urutan bilangan yang memiliki aturan tertentu itu disebut **barisan bilangan** . Sedangkan urutan bilangan – bilangan pada contoh e) dan f) di atas **tidak mempunyai aturan tertentu**, sehingga **bukan** merupakan suatu **barisan bilangan**.

Bentuk umum barisan bilangan dapat dinyatakan dengan :

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$$

Dengan : U_1 = suku ke - 1

U_2 = suku ke - 2

U_3 = suku ke - 3

.

U_{n-1} = suku ke - (n-1)

U_n = suku ke - n (suku umum barisan bilangan)

2. POLA BILANGAN

Dari bentuk umum barisan suatu bilangan, dapat kita tentukan **pola barisan bilangan** itu.

Contoh 1:

Untuk barisan bilangan pada contoh a)

Urutan ke -	Besar Bilangan	Pola
1	2	$2 \bullet 1$
2	4	$2 \bullet 2$
3	6	$2 \bullet 3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	$2 \bullet 10$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	...	$2 \bullet n$

Jadi pola untuk bilangan yang ke - n pada contoh a) adalah **$2 \bullet n$ atau $2n$ atau $U_n = 2n$**

Contoh 2 :

Untuk barisan bilangan pada contoh c)

Urutan ke -	Besar Bilangan	Pola
1	1	$2 \bullet 1 - 1$
2	3	$2 \bullet 2 - 1$
3	5	$2 \bullet 3 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	$2 \bullet 10 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	...	$2 \bullet n - 1$

Jadi pola untuk bilangan yang ke - n pada contoh a) adalah **$(2 \bullet n - 1)$ atau $(2n - 1)$ atau $U_n = 2n - 1$.**

Contoh 3 :

Carilah tiga suku pertama pada setiap barisan berikut ini, jika rumus suku ke - n diketahui sebagai berikut :

a. $U_n = 4n + 3$

b. $U_n = n^2 - 1$

Jawab :

a. $U_n = 4n + 3$

$$U_1 = 4.1 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$U_2 = 4.2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$U_3 = 4.3 + 3 = 12 + 3 = 16$$

Jadi, tiga suku pertamanya adalah 7, 11, 16

b. $U_n = n^2 - 1$

$$U_1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$U_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$U_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

Jadi tiga suku pertamanya adalah : 0, 3, 8

Contoh 4 :

Hitunglah nilai n jika,

a) $U_n = 3n + 5 = 95$

b) $U_n = n^2 - 4 = 21$

Jawab :

a. $U_n = 3n + 5 = 95$

$$3n + 5 = 95$$

$$3n = 95 - 5$$

$$3n = 90 \Rightarrow n = 30$$

b. $U_n = n^2 - 4 = 21$

$$n^2 - 4 = 21$$

$$n^2 = 21 + 4$$

$$n^2 = 25$$

$$n = 5$$

Latihan 2 :

1. Tentukan lima suku yang pertama dari barisan bilangan berikut :

a. $U_n = n^3$

- b. $U_n = 2n + 5$
- c. $U_n = 2n^2 - 2$
2. Hitunglah nilai n jika ,
 - a. $U_n = 4n - 3 = 157$
 - b. $U_n = 1 - 2n = -41$
 - c. $U_n = 2^n - 1 = 31$
3. Tentukan pola bilangan (rumus suku ke - n) dari barisan bilangan berikut :
 - a. 2, 4, 8, 16,
 - b. 1, 4, 9, 16,
 - c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$
 - d. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

3. DERET BILANGAN

Deret suatu barisan bilangan dan jumlah n suku pertamanya

Jika suku - suku suatu barisan dijumlahkan maka penjumlahan berurut dari suku - suku barisan itu disebut **Deret**

Secara Umum : $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ adalah suku -suku dari suatu barisan, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ adalah deret yang bersesuaian dengan barisan itu. Jumlah n suku pertama dari suatu barisan dilambangkan dengan **S_n , atau**

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Misal :

- Barisan : 1, 2, 3, 4, 5,
Deret : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$
- Barisan : 1, 4, 9, 16, 25,
Deret : $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots$

Contoh 5:

Diketahui suatu deret $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ hitunglah:

- a. jumlah dua suku yang pertama
- b. jumlah lima suku yang pertama
- c. jumlah sepuluh suku yang pertama
- d. jumlah n suku yang pertama
- e. jumlah 20 suku yang pertama

Jawab:

a. $S_2 = 1 + 3 = 4$

b. $S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

c. $S_{10} = 10^2 = 100$

d. $S_n = n^2$

e. $S_{20} = 20^2 = 400$

Latihan 3 :

1. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret berikut ini

a. $2 + 7 + 17 + \dots$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$

c. $10 + 8 + 6 + 4 + \dots$

d. $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$

e. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

2. Tentukan jumlah 6 suku yang pertama dari deret berikut ini:

a. $S_n = n^2 - 4$

b. $S_n = n^2 + 4$

c. $S_n = n^3 - 2n$

d. $S_n = 2^{n+1}$

4. NOTASI SIGMA

a. Pengertian notasi sigma

Perhatikan bentuk penjumlahan sepuluh bilangan asli pertama, yaitu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, jika yang dijumlahkan bukan sepuluh bilangan asli, melainkan 100 bilangan asli pertama, menuliskan secara lengkap tentu akan terlalu panjang dan memakan waktu yang lama.

Dalam matematika komunikasi dapat dilakukan dengan menggunakan symbol, misalnya menuliskan jumlah seratus bilangan asli yang pertama, disingkat dengan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$

Menuliskan penjumlahan bilangan beruntun secara singkat ialah dengan menggunakan tanda Σ (*dibaca sigma*).

Dengan menggunakan notasi sigma, maka penjumlahan beruntun sepuluh bilangan asli pertama dapat

disingkat sebagai berikut :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{k=1}^{10} k$$

Bilangan 1 disebut batas bawah

Bilangan 10 disebut batas atas

Untuk seratus bilangan asli yang pertama dapat ditulis

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

Contoh 6 :

Nyatakan deret berikut kedalam notasi sigma

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + 9$

Jawab :

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

Dari deret $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$, dapat diubah menjadi $(2(1) - 1) + (2(2) - 1) + (2(3) - 1) + (2(4) - 1) + (2(5) - 1) + (2(6) - 1) + (2(7) - 1)$ atau ditulis $(2k - 1)$ dengan mulai $k = 1$ sampai $k = 7$. Dalam notasi sigma. Dalam notasi sigma disingkat $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{k=1}^7 (2k - 1)$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + 9$

Notasi sigma dari $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$, dapat diubah menjadi $2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6)$ atau ditulis $(2k)$ dengan mulai $k = 1$ sampai $k = 6$. Dalam notasi sigma disingkat : $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{k=1}^6 (2k)$

Contoh 7.

Tuliskan bentuk notasi sigma berikut ke dalam bentuk penjumlahan beruntun, dan kemudian hitunglah jumlahnya

a. $\sum_{k=1}^6 5k$

b. $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k+2}$

c. $\sum_{k=1}^3 2^k$

Jawab :

a. $\sum_{k=1}^6 5k = (5 \times 1) + (5 \times 2) + (5 \times 3) + (5 \times 4) + (5 \times 5)$

$$= 5 + 10 + 15 + 20 + 25 = 75$$

b. $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k+2} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{3+2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\
 &= \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60} \\
 \text{c. } \sum_{k=1}^3 2^k &= 2^1 + 2^2 + 2^3 \\
 &= 2 + 4 + 8 = 14
 \end{aligned}$$

b. Sifat – sifat notasi sigma

Misalkan a_k dan b_k merupakan suku ke – k dan C suatu konstanta

1. Jika $a_k = C$, maka $\sum_{k=1}^n C = nC$
2. $\sum_{k=1}^n C a_k = C \sum_{k=1}^n a_k$
3. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
4. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k + \sum_{k=1}^n (b_k)^2$
5. $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n$

Contoh 8 :

Dengan menggunakan penjumlahan beruntun, tunjukkan bahwa :

- a. $\sum_{k=1}^6 (2k + 3) = 2 \cdot \sum_{k=1}^6 k + 18$
- b. $\sum_{k=3}^8 k = \sum_{k=1}^6 (k + 2)$

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sum_{k=1}^6 (2k + 3) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^6 k + 18 \\
 \sum_{k=1}^6 (2k + 3) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^6 k + 18 \\
 \{(2.1 + 3) + (2.2 + 3) + (2.3 + 3) + (2.4 + 3) + (2.5 + 3) + (2.6 + 3)\} \\
 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 &= 2(21) + 18 \\
 60 &= 42 + 18 \\
 \mathbf{60} &= \mathbf{60} \\
 \text{b. } \sum_{k=3}^8 k &= \sum_{k=1}^6 (k + 2) \\
 \sum_{k=3}^8 k &= \sum_{k=1}^6 (k + 2) \\
 3+4+5+6+7+8 &= \\
 (1+2)+(2+2)+(3+2)+(4+2)+(5+2)+(6+2) \\
 33 &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\
 \mathbf{33} &= \mathbf{33}
 \end{aligned}$$

Latihan 4 ;

1. Tulislah jumlah berikut ini dengan satu notasi sigma

$$\begin{aligned} \text{a. } & \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 k^2 \\ \text{b. } & \sum_{n=2}^{10} (a^3 + 1) + \sum_{a=2}^{10} (a^2 + 1) \\ \text{c. } & \sum_{k=1}^{15} (k^2 - 1) - \sum_{k=1}^{15} (k + 1) \end{aligned}$$

2. Tulislah jumlah berikut dengan batas bawah ini.

$$\begin{aligned} \text{a. } & \sum_{a=5}^{16} a \\ \text{b. } & \sum_{k=4}^{10} (k + 2) \\ \text{c. } & \sum_{n=2}^{10} \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

11.2 Barisan Dan Deret Aritmatika

1. Pengertian Barisan dan Deret Aritmatika

Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini

- a) 1, 3, 5, 7,
- b) 6, 10, 14, 18,
- c) 11, 8, 5, 2,
- d) 20, 15, 10, 5,

Pada setiap barisan di atas, tampak bahwa selisih dua suku berurutan **selalu tetap**. Barisan bilangan yang mempunyai cirri seperti itu disebut **Barisan Aritmatika**, dan selisih dua suku berurutan itu disebut **beda** yang biasa dilambangkan dengan huruf **b**.

Misal :

- a) 1, 3, 5, 7,, $b = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 2$
- b) 6, 10, 14, 18,, $b = 10 - 6 = 14 - 10 = 18 - 14 = 4$
- c) 11, 8, 5, 2,, $b = 8 - 11 = 5 - 8 = 2 - 5 = -3$
- d) 20, 15, 10, 5, ..., $b = 15 - 20 = 10 - 15 = 5 - 10 = -5$

Suku pertama dari barisan aritmatika biasanya dilambangkan dengan huruf **a**.

Secara umum barisan aritmatika didefinisikan sebagai berikut:

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut barisan aritmatika untuk n bilangan asli dan $n > 1$ dan berlaku $b = U_n - U_{n-1}$ dengan

U_1 = suku pertama

U_2 = suku kedua

U_3 = suku ketiga

U_n = suku ke - n

Contoh 9.

Tentukan suku pertama dan beda dari tiap barisan aritmatika berikut ini!

a) 7, 8, 9, 10,

b) 3, 8, 13, 18,

c) 9, 6, 3, 0,

Jawab :

a) 7, 8, 9, 10,

suku pertama : $a = 7$ dan beda : $b = 8 - 7 = 9 - 8 = 10 - 9 = 1$

b) 3, 8, 13, 18,

Suku pertama : $a = 3$ dan beda : $b = 8 - 3 = 13 - 8 = 18 - 13 = 5$

c) 9, 6, 3, 0,

Suku pertama : $a = 9$ dan beda : $b = 6 - 9 = 3 - 6 = 0 - 3 = -3$

Contoh 10.

Tentukan 5 suku pertama barisan aritmatika berikut, jika diketahui :

a) $a = 3$ dan $b = -4$

b) $a = 8$ dan $b = 3$

Jawab :

a) $a = 3$ dan $b = -4$

$U_1 = a = 3$

$U_2 = 3 + (-4) = -1$

$U_3 = (-1) + (-4) = -5$

$$U_4 = (-5) + (-4) = -9$$

$$U_5 = (-9) + (-4) = -13$$

Jadi lima suku pertama barisan itu adalah : 3, -1, -5, -9, -11.

b) $a = 8$ dan $b = 3$

$$U_1 = a = 8$$

$$U_2 = 8 + 3 = 11$$

$$U_3 = 11 + 3 = 14$$

$$U_4 = 14 + 3 = 17$$

$$U_5 = 17 + 3 = 20$$

Jadi lima suku pertama barisan itu adalah : 8, 11, 14, 17, 20.

Latihan 5

1) Tentukan suku pertama dan beda dari barisan aritmatika di bawah ini

a. 2, 8, 14, 20,

b. 8, 11, 14, 17,

c. -6, -3, 0, 3,

d. $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4,

2) Tulis lima suku pertama dari masing – masing barisan aritmatika berikut, jika diketahui :

a. $a = 8$ dan $b = 3$

b. $a = -7$ dan $b = 2,5$

c. $a = -\frac{1}{2}$ dan $b = \frac{2}{3}$

2. Suku ke – n barisan aritmatika

Dari bentuk umum barisan aritmatika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 = U_2 + b = a + b + b = a + 2b$$

$$U_4 = U_3 + b = a + 2b + b = a + 3b$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Jadi pola bilangan barisan aritmatika adalah

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$$

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots, a + (n - 1)b$
 Jadi rumus suku ke - n dari barisan aritmatika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Dengan : n = banyak suku, $n \in$ bilangan asli

a = suku pertama

b = beda atau selisih

U_n = suku ke - n

Contoh 11.

Tentukan rumus suku ke - n dari barisan aritmatika berikut jika di diketahui :

a) $a = 3$ dan $b = -4$

b) $a = 8$ dan $b = 3$

Jawab :

a) $a = 3$ dan $b = -4$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 3 + (n - 1).(-4)$$

$$U_n = 3 + (-4n + 4)$$

$$U_n = 3 - 4n + 4$$

$$U_n = 1 - 4n$$

b) $a = 8$ dan $b = 3$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 8 + (n - 1).3$$

$$U_n = 8 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n + 5$$

Contoh 12.

Tentukan suku pertama, beda, rumus suku ke - n dan suku ke - 12 dari barisan aritmatika 10, 15, 20, 25,

Jawab :

Suku pertama : $a = 10$

Beda : $b = 15 - 10 = 5$

Rumus suku ke n : $U_n = a + (n - 1)b$

$$= 10 + (n - 1)5$$

$$= 10 + 5n - 5$$

$$U_n = 5n + 5$$

$$\text{Suku ke - 12} : U_{12} = 5 \cdot 12 + 5$$

$$= 60 + 5$$

$$= 65$$

Contoh 13.

Suku pertama dari suatu barisan aritmatika sama dengan 2, sedangkan suku ke - 10 sama dengan 29.

a) Carilah beda dari barisan aritmatika itu

b) Carilah suku ke - 25

c) Suku keberapakah yang nilainya sama dengan 101?

Jawab :

a) Beda dari barisan aritmatika itu

$$a = 2 \text{ dan } U_{10} = 29$$

$$U_{10} = 29$$

$$a + 9b = 29$$

$$2 + 9b = 29$$

$$9b = 29 - 2$$

$$9b = 27$$

$$b = \frac{27}{9}$$

$$\mathbf{b = 3 \text{ (beda = 3)}}$$

b) Suku ke - 25

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{25} = 2 + (25 - 1)3$$

$$= 2 + 24 \cdot 3$$

$$= 2 + 72$$

$$\mathbf{= 74 \text{ (suku ke - 25 = 74)}}$$

c) Suku keberapakah yang nilainya sama dengan 101?

$$U_n = 101$$

$$a + (n - 1)b = 101$$

$$2 + (n - 1)3 = 101$$

$$2 + 3n - 3 = 101$$

$$-1 + 3n = 101$$

$$3n = 101 + 1$$

$$3n = 102$$

$$n = \frac{102}{3} = 34$$

Jadi 101 adalah suku yang ke - 34

Latihan 6:

- 1) Tentukan rumus suku ke - n dari barisan aritmatika di bawah ini
 - a. 2, 8, 14, 20,
 - b. 8, 11, 14, 17,
 - c. -6, -3, 0, 3,
 - d. $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4,
- 2) Tentukan nilai n jika diketahui
 - a. $a = 19$, $b = -5$ dan $U_n = -41$
 - b. $a = -2$, $b = 7$ dan $U_n = 138$
 - c. $a = 6$, $b = 4$ dan $U_n = 58$
- 3) Jika suku ke - 7 barisan aritmatika adalah 14 dan suku ke - 13 adalah 2, tentukanlah tiga suku pertama barisan tersebut.

3. Jumlah n suku pertama deret aritmatika

Jika $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$ adalah deret aritmatika

Jika jumlah n suku pertama deret aritmatika dilambangkan dengan S_n , maka S_n dapat ditentukan dengan rumus :

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

atau

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

Dengan : n = banyak suku, $n \in$ bilangan asli

a = suku pertama

b = beda atau selisih

U_n = suku ke - n

S_n = Jumlah n suku pertama deret aritmatika

Contoh 14

Hitunglah jumlah 20 suku pertama pada deret $9 + 12 + 15 + 18 + \dots$

Jawab :

$$a = 9 \quad b = 12 - 9 = 3 \quad \text{dan} \quad n = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \cdot 9 + (20 - 1)3)$$

$$= 10(18 + 19 \cdot 3)$$

$$= 10(18 + 57)$$

$$= 10(75) = \mathbf{750}$$

Contoh 15

Hitunglah jumlah dari deret $5 + 7 + 9 + \dots + 61$

Jawab :

$$a = 5, \quad b = 7 - 5 = 2 \quad \text{dan} \quad U_n = 61$$

$$U_n = 61$$

$$a + (n - 1)b = 61$$

$$5 + (n - 1)2 = 61$$

$$5 + 2n - 2 = 61$$

$$3 + 2n = 61$$

$$2n = 61 - 3$$

$$2n = 58$$

$$n = \frac{58}{2}$$

$$\mathbf{n = 29 \text{ (banyak suku = 29)}}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

$$S_{29} = \frac{29}{2} (5 + 61)$$

$$= \frac{29}{2} (66)$$

$$= 29 (33)$$

$$S_{29} = 957$$

Jadi jumlah deret itu adalah 957

Contoh 16

Hitunglah jumlah semua bilangan asli antara 5 dan 100 yang habis dibagi 7

Jawab :

Bilangan asli antara 5 dan 100 yang habis dibagi 7 adalah

$$7 + 14 + 21 + \dots + 98$$

$$a = 7, b = 14 - 7 = 7 \text{ dan } U_n = 98$$

$$U_n = 98$$

$$a + (n - 1)b = 98$$

$$7 + (n - 1)7 = 98$$

$$7 + 7n - 7 = 98$$

$$7n = 98$$

$n = \frac{98}{7} = 14$ (banyak bilangan yang habis dibagi 7 antara 5 dan 100 ada 14 buah)

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$

$$S_{14} = \frac{14}{2} (7 + 98)$$

$$= 7(105)$$

$$S_{14} = 735$$

Jadi, jumlah bilangan antara 5 dan 100 yang habis dibagi 7 adalah 735

Latihan 7 :

- 1) Hitunglah jumlah 20 suku pertama pada setiap deret aritmatika berikut :
 - a. $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$
 - b. $50 + 45 + 40 + 35 + \dots$
 - c. $-7 - 14 - 21 - 28 - \dots$
- 2) Hitunglah jumlah setiap deret aritmatika berikut ini :
 - a. $6 + 8 + 10 + \dots + 100$
 - b. $85 + 80 + 75 + \dots + 10$
 - c. $-20 - 16 - 12 - \dots + 8$

4. Penerapan deret aritmatika

Penerapan barisan dan deret aritmatika yang dapat digunakan dalam bidang keuangan, pertanian, dan lain sebagainya.

Contoh 17

Pada bulan Januari 2001 Anto menabung Rp. 10.000,00. Jika setiap bulan berikutnya Anto menabung Rp. 5.000,00 lebihnya dari bulan sebelumnya. Berapakah jumlah seluruh

tabungan Anto sampai akhir tahun?

Jawab :

Tabungan Anto dalam bentuk deret adalah

10.000 + 15.000 + 20.000 +

$a = 10.000$, $b = 5.000$ dan $n = 12$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2.(10.000) + (12 - 1)5.000)$$

$$= 6(20.000 + 11.(5.000))$$

$$= 6(20.000 + 55.000)$$

$$= 6(75.000)$$

$$S_{12} = 450.000$$

Jadi, jumlah seluruh tabungan Anto sampai akhir tahun adalah Rp. 450.000,00

Latihan 8

- 1) Harga pembelian sebuah sepeda motor baru adalah Rp. 12.000.000,00. Setelah digunakan selama 3 tahun, sepeda motor itu dijual dengan harga Rp. 8.400.000,00. Jika penyusutan harga sepeda motor tiap tahun besarnya sama maka tentukan harga jual sepeda motor tersebut setelah digunakan selama 5 tahun.
- 2) Untuk membuat kerajinan tangan, jika memerlukan 16 potong kawat yang tidak sama panjang. Potongan kawat terpanjang 90 cm dan potongan kawat terpendek 15 cm. Jika potongan – potongan kawat dijejerkan dari yang terpanjang hingga terpendek maka perbedaan panjang dua potong kawat yang berdekatan harus sama. Berapa panjang kawat yang diperlukan jika? Berapa perbedaan panjang kawat?

11.3 Barisan Dan Deret Geometri

1. Pengertian barisan dan deret geometri

Pada setiap barisan di atas, tampak bahwa perbandingan dua suku berurutan **selalu tetap**. Barisan bilangan yang mempunyai ciri seperti itu disebut **Barisan Geometri**, dan perbandingan dua suku berurutan itu disebut rasio yang biasa dilambangkan dengan huruf **r**.

Misal :

a) $1, 4, 16, \dots, r = \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = 4$

b) $16, 8, 4, \dots, r = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Suku pertama dari barisan geometri biasanya dilambangkan dengan huruf **a**.

Contoh 18

Tentukan suku pertama dan rasio dari barisan geometri berikut :

1) $1, 2, 4, 8, \dots$

2) $2, 6, 18, 54, \dots$

3) $3, -6, 12, -24, \dots$

Jawab :

1) $1, 2, 4, 8, \dots$

suku pertama : $a = 1$ dan rasio : $r = \frac{2}{1} = 2$

2) $2, 6, 18, 54, \dots$

suku pertama : $a = 2$ dan rasio : $r = \frac{6}{2} = 3$

3) $3, -6, 12, -24, \dots$

suku pertama : $a = 3$ dan rasio : $r = \frac{-6}{3} = -2$

Latihan 9

Tentukan suku pertama dan rasio dari barisan geometri berikut

1) $3, 6, 12, 24, \dots$

2) $1, 3, 9, 27, \dots$

3) $27, -9, 3, -1, \dots$

4) $1, -1, 1, -1, \dots$

5) $2, -4, 8, -16, \dots$

2. Suku ke - n barisan geometri

Secara umum barisan geometri didefinisikan sebagai berikut:

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut barisan geometri untuk n bilangan asli dan $n > 1$ dan berlaku : $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ dengan

U_1 = suku pertama

U_2 = suku kedua

U_3 = suku ketiga

.

.

.

U_n = suku ke - n

Dari bentuk umum barisan geometri $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$

$U_1 = a$

$U_2 = U_1 \cdot r = ar$

$U_3 = U_2 \cdot r = ar \cdot r = ar^2$

$U_4 = U_3 \cdot r = ar^2 \cdot r = ar^3$

.

.

.

$U_n = ar^{n-1}$

Jadi pola bilangan barisan aritmatika adalah

$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$
 $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$

Jadi rumus suku ke - n dari barisan geometri adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

Dengan : n = banyak suku, $n \in$ bilangan asli

a = suku pertama

r = rasio atau perbandingan

U_n = suku ke - n

Contoh 19

Tentukan rumus suku ke - n dan suku ke - 7 pada barisan geometri : 1, 2, 4, 8,

Jawab :

a = 1 dan r = 2

Rumus suku ke - n : $U_n = ar^{n-1}$

= $1 \cdot 2^{n-1}$

$$U_n = 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Suku ke } - 7 & : U_7 = 2^{7-1} \\ & U_7 = 2^6 \\ & U_7 = 64\end{aligned}$$

Contoh 20

Suku pertama dari suatu barisan geometri sama dengan 128, sedangkan suku ke - 4 sama dengan 16,

- Carilah rasio barisan geometri tersebut
- Carilah suku ke - 6
- Suku keberapakah yang nilainya sama dengan 1?

Jawab :

- Rasio barisan geometri tersebut

$$a = 128 \quad \dots(i)$$

$$U_4 = 16 = ar^3 \quad \dots(ii)$$

Persamaan (ii) dibagi persamaan (i) diperoleh

$$\frac{U_4}{a} = \frac{a.r^3}{a} = \frac{16}{128}$$

$$r^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ (rasio} = \frac{1}{2} \text{)}$$

- Suku ke - 6

$$U_6 = ar^5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 128 \cdot \frac{1}{32} = 4 \quad \text{(suku ke- 6 adalah 4)}$$

- Suku yang nilainya sama dengan 1?

$$U_n = 1$$

$$ar^{n-1} = 1$$

$$128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{128}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$n - 1 = 7$$

$$n = 8$$

Jadi, 1 adalah suku ke - 8

Contoh 21

Diketahui barisan geometri dengan suku pertama $a = 1$ dan

$U_7 = 64$. Tentukan suku ke - 10 barisan itu.

Jawab :

$$\frac{U_7}{a} = \frac{a.r^6}{a} = \frac{64}{1}$$

$$r^6 = 64$$

$$r^6 = (\pm 2)^6$$

$$r = \pm 2$$

$$\text{Suku ke - 10} = U_{10} = a.r^9$$

- Untuk $r = 2 \rightarrow U_{10} = 1.(2)^9 = 512$

- Untuk $r = -2 \rightarrow U_{10} = 1.(-2)^9 = -512$

Latihan 10 :

1) Tentukan rumus suku ke - n dan suku ke - 7 dari barisan aritmatika di bawah ini.

a. 3, 6, 12, 24,

b. 1, 3, 9, 27,

c. 27, -9, 3, -1,

d. 1, -1, 1, -1,

e. 2, -4, 8, -16,

2) Tulislah empat suku pertama dari barisan geometri yang ditentukan oleh rumus berikut :

a. $U_n = 2^{n+1}$

b. $U_n = 2.3^{n-1}$

c. $U_n = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

3) Tentukan suku pertama, rasio dan U_n , jika

a. $U_3 = 18$ dan $U_5 = 162$

b. $U_4 = 2$ dan $U_6 = \frac{1}{2}$

2. Jumlah n suku pertama deret geometri

Jika $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$ adalah deret geometri. Jika jumlah n suku pertama deret geometri dilambangkan dengan S_n , maka S_n dapat ditentukan dengan rumus :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad \text{untuk } r > 1$$

atau

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ untuk } r < 1$$

Dengan : n = banyak suku, $n \in$ bilangan asli

a = suku pertama

r = rasio atau perbandingan

S_n = Jumlah n suku pertama deret geometri

Contoh 22

Hitunglah jumlah 7 suku pertama pada deret geometri berikut ini.

a) $1 + 3 + 9 + \dots$

b) $16 + 8 + 4 + \dots$

Jawab :

a. $a = 1$ dan $r = 3$

Oleh karena $r > 1$ maka rumus yang digunakan adalah

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1(3^7-1)}{3-1}$$

$$S_7 = \frac{1(2187-1)}{2}$$

$$S_7 = \frac{1(2186)}{2}$$

$$S_7 = \frac{2186}{2}$$

$$S_7 = 1.093$$

Jadi, jumlah 7 suku pertama deret geometri itu adalah 1.093

b. $a = 16$ dan $r = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

Oleh karena $r < 1$, maka rumus yang digunakan adalah :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_7 = \frac{16(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_7 = \frac{16(1-\frac{1}{128})}{\frac{1}{2}}$$

$$S_7 = 32 \cdot (\frac{127}{128})$$

$$S_7 = \frac{127}{4}$$

$$S_7 = 31\frac{3}{4}$$

Jadi, jumlah 7 suku pertama deret itu

Contoh 23

Hitunglah jumlah deret geometri $3 + 6 + 12 + \dots + 192$

Jawab :

$a = 3, r = \frac{6}{3} = 2$ dan $U_n = 192$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\begin{aligned}
 U_n &= 192 \\
 a \cdot r^{n-1} &= 192 \\
 3 \cdot 2^{n-1} &= 192 \\
 2^{n-1} &= \frac{192}{3} \\
 2^{n-1} &= 2^6 \\
 n-1 &= 6 \\
 n &= 6+1 \\
 n &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_7 &= \frac{3(2^7-1)}{2-1} \\
 S_7 &= \frac{3(128-1)}{1} \\
 S_7 &= 3(127) \\
 S_7 &= 381
 \end{aligned}$$

di, jumlah deret geom

Contoh 24

Jumlah deret geometri $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 510$. Carilah nilai n.

Jawab :

$$a = 2, r = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ dan } S_n = 510$$

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = 510$$

$$\frac{2(2^n-1)}{2-1} = 510$$

$$\frac{2(2^n-1)}{1} = 510$$

$$2(2^n-1) = 510$$

$$2^n-1 = \frac{510}{2}$$

$$2^n-1 = 255$$

$$2^n = 255 + 1$$

$$2^n = 256$$

$$2^n = 2^8$$

$$n = 8$$

Jadi, nilai n = 8

Latihan 11

- 1) Hitunglah jumlah 8 suku pertama pada setiap deret geometri berikut ini :
 - a. $5 + 10 + 15 + \dots$
 - b. $1 - 2 + 4 - \dots$
 - c. $27 - 9 + 3 - \dots$
- 2) Hitunglah jumlah setiap deret geometri berikut ini:
 - a. $2 + 6 + 18 + \dots + 4374$
 - b. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{64}$

3) Carilah nilai n jika :

a. $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = 120$

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{127}{128}$

4) Suku ke lima dari suatu deret geometri sama dengan 8, sedangkan suku kesepuluh sama dengan -256 . Tentukan :

- Suku pertama dan rasio deret geometri itu
- Jumlah sepuluh suku pertama

3. Deret geometri tak hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang mempunyai suku – suku yang tak hingga banyaknya. Perhatikan contoh deret geometri berikut ini.

a) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

- Pada contoh a), nilai $r > 1$ dan bilangannya makin lama makin besar ($U_n \rightarrow \infty$). Jika n menuju bilangan yang cukup besar ($n \rightarrow \infty$) maka deret geometri yang seperti itu disebut deret geometri naik tak terhingga.
- Pada contoh b) nilai $r < 1$ dan bilangannya makin lama makin kecil ($U_n \rightarrow 0$). Jika n menuju bilangan yang cukup besar ($n \rightarrow \infty$) maka deret yang seperti itu disebut deret geometri turun tak berhingga.
- Jika jumlah deret geometri tak hingga dilambangkan dengan S_n , maka S_n dapat ditentukan dengan rumus :

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$$

Dengan :

S_n = Jumlah n suku pertama deret geometri

a = suku pertama

r = rasio atau perbandingan

Contoh 25

Hitunglah jumlah dari setiap deret geometri tak hingga berikut ini.

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\text{b) } 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots$$

Jawab :

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$a = 1$ dan $r = \frac{1}{2}$ berarti berada pada interval $-1 < r < 1$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{b) } 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots$$

$a = 4$ dan $r = -\frac{1}{2}$ berarti berada pada interval $-1 < r < 1$

$$S_{\infty} = \frac{4}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{4}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Contoh 26

Suatu deret geometri tak hingga dengan $S_{\infty} = 10$ dan $a = 5$.

Tentukanlah :

a) Rasio

b) Jumlah 4 suku pertama deret geometri tersebut

Jawab :

a. Rasio

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$10 = \frac{5}{1-r}$$

$$10(1-r) = 5$$

$$10 - 10r = 5$$

$$-10r = 5 - 10$$

$$-10r = -5$$

$$r = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

Jadi, rasionya adalah $\frac{1}{2}$

b. Jumlah 4 suku pertama deret geometri tersebut

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_4 = \frac{5(1-(\frac{1}{2})^4)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_4 = \frac{5(1 - \frac{1}{16})}{\frac{1}{16}}$$

$$S_4 = 10(\frac{15}{16}) = \frac{150}{16} = \frac{75}{8} = 9\frac{3}{8}$$

Jadi, jumlah 4 suku pertama deret tersebut adalah $9\frac{3}{8}$

4. Penerapan deret geometri

Penerapan barisan dan deret geometri yang dapat digunakan dalam bidang keuangan, pertanian, dan lain sebagainya.

Contoh 27

Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat dengan ketinggian 4 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul akan mencapai $\frac{3}{4}$ dari tinggi yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan yang dilalui bola itu sampai berhenti.

Jawab :

Bola jatuh : $a = 4$ dan $r = \frac{3}{4}$

Bola memantul : $a = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ dan $r = \frac{3}{4}$

Panjang lintasan bola jatuh adalah :

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{4}{1-\frac{3}{4}}$$

$$S_{\infty} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16 \text{ meter (panjang lintasan bola jatuh)}$$

Panjang lintasan bola memantul (naik) adalah :

$$S_{\infty} = \frac{3}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{3}{1-\frac{3}{4}}$$

$$S_{\infty} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12 \text{ meter (panjang lintasan bola memantul)}$$

Jadi, panjang lintasan seluruhnya yang ditempuh bola adalah panjang lintasan bola jatuh + panjang lintasan bola memantul = $16 + 12 = 28 \text{ meter}$.

DAFTAR PUSTAKA

- Adnan, R. W. T. (2014). Barisan dan Deret. In Matematika 2 (pp. 1–44). repository.ut.ac.id.
- Anwar, H. (2017). Hasil Belajar Barisan dan Deret Aritmatika Melalui Pembelajaran Skrip Kooperatif. Jurnal Penelitian Tindakan dan Pendidikan. 3(2), 113-122. Retrieved from <https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cach e:VvL9lbv0ISUJ:https://rumahjurnal.net/ptp/article/download/106/68+&cd=1&hl=id&ct=clnk&gl=id>
- Dhoruri, A. (2011). Barisan dan Deret Bilangan. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Mohammad Ardani Samad. (2021). Matematika Dasar. Banyumas:Pena Persada.

BAB 12

APLIKASI BARISAN DAN DERET

Oleh Kirtyana Nindita

12.1 Pendahuluan

Barisan serta deret aritmatika dan geometri telah banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Pada persoalan matematika, aplikasi barisan dan deret dituangkan dalam bentuk soal cerita yang belum tentu menyebutkan apakah barisan atau deret tersebut merupakan aritmatika atau geometri. Untuk membedakan barisan atau deret aritmatika dengan barisan atau deret geometri sebenarnya tidak sulit. Pada barisan atau deret aritmatika, kenaikan atau penurunan nilai/bilangan berupa penjumlahan atau pengurangan dengan bilangan yang konstan. Sedangkan pada barisan atau deret geometri, kenaikan atau penurunan nilai/bilangan berupa perkalian atau pembagian dengan bilangan yang konstan. Dalam hal ini, kenaikan atau penurunan dalam bentuk persentase termasuk dalam barisan atau deret geometri.

12.2 Aplikasi Barisan dan Deret Aritmatika

12.2.1 Contoh Menghitung Kapasitas Tempat Duduk

Suatu tribun stadion memiliki 40 baris kursi dengan 20 kursi pada baris pertama, 24 kursi pada baris kedua, 28 kursi pada baris ketiga, dan seterusnya.

- Tentukan banyaknya kursi pada baris ke-31.
- Tentukan jumlah semua kursi dalam tribun tersebut.

Penyelesaian:

Banyaknya kursi pada setiap baris dapat dituliskan sebagai berikut:

baris pertama (U_1) $\rightarrow$ 20 kursi,

baris kedua (U_2) $\rightarrow$ 24 kursi,

baris ketiga (U_3) $\rightarrow$ 28 kursi

baris keempat (U_4) $\rightarrow$ 32 kursi, dan seterusnya

Dengan demikian, selisih atau beda (b) antarbaris kursi akan menghasilkan bilangan yang sama, yaitu

$$b = U_2 - U_1 = 24 - 20 = 4,$$

$$b = U_3 - U_2 = 28 - 24 = 4,$$

$$b = U_4 - U_3 = 32 - 28 = 4, \text{ dan seterusnya,}$$

Sehingga banyaknya kursi pada setiap baris membentuk barisan aritmatika, dengan beda $b = 4$ kursi.

- a. Menghitung banyaknya kursi pada baris ke-31 berarti menghitung U_n , yaitu suku ke- n pada barisan aritmatika, dengan $n = 31$. Diperoleh

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

$$U_{31} = 20 + (31-1)4$$

$$= 20 + (30)4$$

$$= 20 + 120$$

$$= 140$$

Jadi, banyaknya kursi pada baris ke-31 adalah 140 kursi.

- b. Menghitung jumlah kursi pada tribun stadion berarti menghitung nilai S_n , yaitu jumlahan dari semua suku pada barisan aritmatika. Karena diketahui terdapat 40 baris kursi, yang berarti $n = 40$, maka

$$S_n = \frac{n}{2} [2U_1 + (n-1)b]$$

$$S_{40} = \frac{40}{2} [2(20) + (40-1)4]$$

$$= 20 [40 + (39)4]$$

$$= 20 (40 + 156)$$

$$= 20 (196)$$

$$= 3.920$$

Jadi, jumlah kursi pada tribun stadion tersebut adalah 3.920 kursi.

12.2.2 Contoh Terkait Kenaikan Gaji dengan Nominal Konstan

Suatu perusahaan memberikan gaji sejumlah Rp60.000.000 untuk satu tahun pertama dengan kenaikan Rp3.000.000 setiap tahun.

- Tentukan banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-8.
- Hitunglah total gaji yang diperoleh selama 10 tahun pertama.

Penyelesaian:

Gaji yang diperoleh setiap tahun dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{gaji tahun pertama } (U_1) = \text{Rp}60.000.000$$

$$\begin{aligned}\text{gaji tahun kedua } (U_2) &= \text{Rp}60.000.000 + \text{Rp}3.000.000 \\ &= \text{Rp } 63.000.000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{gaji tahun ketiga } (U_3) &= \text{Rp}63.000.000 + \text{Rp}3.000.000 \\ &= \text{Rp}66.000.000, \text{ dan seterusnya.}\end{aligned}$$

Karena nominal kenaikan gaji tersebut konstan/tetap setiap tahun, maka nominal gaji per tahun membentuk barisan aritmatika dengan kenaikan atau selisih gaji (b) = Rp3.000.000.

- Menentukan banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-8 berarti menghitung U_n dengan $n = 8$, maka

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

$$\begin{aligned}U_8 &= 60.000.000 + (8-1)3.000.000 \\ &= 60.000.000 + 7(3.000.000) \\ &= 60.000.000 + 21.000.000 \\ &= 81.000.000\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-8 sebesar Rp81.000.000.

- Menghitung total gaji selama 10 tahun pertama berarti menghitung S_n dengan $n = 10$. Oleh karena itu,

$$S_n = \frac{n}{2} [2U_1 + (n-1)b]$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10}{2} [2(60.000.000) + (10-1)3.000.000] \\ &= 5[120.000.000 + 9(3.000.000)] \\ &= 5(120.000.000 + 27.000.000) \\ &= 5(147.000.000) \\ &= 735.000.000 \end{aligned}$$

Jadi, total gaji yang diperoleh selama 10 tahun pertama adalah Rp735.000.000.

12.2.3 Contoh Terkait Peningkatan Aktivitas Fisik

Ani berjalan kaki sebanyak 2000 langkah pada hari pertama. Pada hari kedua, dia berjalan kaki sebanyak 2250 langkah. Kemudian pada hari-hari berikutnya, Ani berkomitmen untuk berjalan kaki 250 langkah lebih banyak daripada satu hari sebelumnya.

- Pada hari ke berapakah Ani harus berjalan kaki sebanyak 5000 langkah?
- Setelah berapa hari total langkah kaki Ani mencapai 12.500 langkah?

Penyelesaian:

Banyaknya langkah kaki Ani setiap hari dapat dituliskan sebagai berikut:

hari pertama (U_1) $\rightarrow$ 2000 langkah,

hari kedua (U_2) $\rightarrow$ 2250 langkah,

hari ketiga (U_3) $\rightarrow$ 2500 langkah, dan seterusnya.

Setiap hari Ani menambah 250 langkah dari hari sebelumnya, sehingga barisan banyaknya langkah kaki tersebut membentuk barisan aritmatika dengan kenaikan atau beda (b) = 250 langkah.

- Karena belum diketahui bahwa target jalan kaki sebanyak 5000 langkah harus terlaksana pada hari ke-berapa, maka

dimisalkan hari tersebut adalah hari ke- n . Berarti 5000 langkah ini merupakan suku ke- n atau U_n , maka diperoleh

$$\begin{aligned}U_n &= U_1 + (n-1)b \\5000 &= 2000 + (n-1)250 \\5000 - 2000 &= (n-1)250 \\3000 &= (n-1)250 \\\frac{3000}{250} &= n-1 \\12 &= n-1 \\n &= 12+1 \\n &= 13\end{aligned}$$

Jadi, Ani harus berjalan kaki sebanyak 5000 langkah pada hari ke-13.

- b. Setelah sekian hari, total langkah kaki Ani akan mencapai 12.500 langkah. Sekian hari yang belum diketahui tersebut dimisalkan dengan n . Karena 12.500 ini merupakan total langkah kaki selama n hari, berarti 12.500 merupakan S_n . Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2}[2U_1 + (n-1)b] \\12.500 &= \frac{n}{2}[2(2000) + (n-1)250] \\2(12.500) &= n(4000 + 250n - 250) \\25.000 &= n(3750 + 250n) \\25.000 &= 3750n + 250n^2 \\0 &= 250n^2 + 3750n - 25.000\end{aligned}$$

yang menghasilkan persamaan kuadrat. Sebelum mencari nilai n , terlebih dahulu persamaan kuadrat tersebut disederhanakan. Caranya adalah dengan membagi ketiga suku dalam persamaan tersebut dengan FPB dari 250, 3750, dan 25.000, yaitu 250. Diperoleh

$$\frac{250n^2 + 3750n - 25.000}{250} = 0$$

$$250$$

$$n^2 + 15n - 100 = 0$$

$$(n + 20)(n - 5) = 0$$

$$n + 20 = 0 \quad \text{atau} \quad n - 5 = 0$$

$$n = -20 \quad \text{atau} \quad n = 5$$

Karena banyaknya hari tidak mungkin bernilai negatif, maka nilai yang mungkin adalah $n = 5$. Jadi, total langkah Ani mencapai 12.500 langkah setelah hari ke-5.

12.2.4 Contoh Terkait Penurunan Nominal Hadiah/Bonus

Seorang walikota ingin memberi hadiah berupa uang tunai dengan total Rp6.000.000 kepada para siswa yang mendapat peringkat 10 besar pada Lomba Matematika yang diadakan di kotanya. Hadiah uang tunai tersebut akan dibagikan dengan nominal yang menurun dari peringkat pertama hingga peringkat terakhir, namun selisih nominal hadiah antarperingkat yang berdekatan tetap sama. Siswa dengan peringkat terakhir akan mendapatkan hadiah dengan nominal paling sedikit, yaitu Rp150.000.

- Tentukan nominal hadiah yang akan diperoleh siswa dengan peringkat pertama.
- Tentukan selisih nominal hadiah antarperingkat yang berdekatan.

Penyelesaian:

Barisan nominal hadiah uang tunai tersebut merupakan barisan aritmatika karena terdapat pernyataan bahwa selisih nominal hadiah antarperingkat yang berdekatan tetap sama. Misalnya selisih hadiah bagi peringkat pertama dengan peringkat kedua akan sama dengan selisih hadiah bagi peringkat keenam dengan peringkat ketujuh.

Diketahui banyaknya siswa yang akan diberi hadiah ada 10 anak, berarti $n = 10$. Total hadiah yang akan diberikan kepada 10 anak sejumlah Rp6.000.000 yang berarti $S_{10} = 6.000.000$. Kemudian siswa dengan peringkat terakhir (peringkat ke-10) akan mendapat Rp150.000 yang berarti

$$U_{10} = 150.000.$$

- a. Menentukan nominal hadiah untuk siswa dengan peringkat pertama berarti menentukan nilai suku pertama (U_1). Karena nilai yang sudah diketahui hanyalah n dan S_n (selisih atau b belum diketahui), maka rumus S_n yang digunakan adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(U_1 + U_{10})$$

$$6.000.000 = 5(U_1 + 150.000)$$

$$\frac{6.000.000}{5} = U_1 + 150.000$$

$$1.200.000 = U_1 + 150.000$$

$$U_1 = 1.200.000 - 150.000$$

$$U_1 = 1.050.000$$

Jadi, nominal hadiah yang akan diperoleh siswa dengan peringkat pertama sebesar Rp1.050.000.

- b. Menentukan selisih nominal hadiah antarperingkat yang berdekatan berarti menentukan nilai b . Rumus yang dapat digunakan adalah rumus untuk menghitung U_n atau rumus untuk menghitung S_n karena nilai U_{10} dan S_{10} telah diketahui. Dalam hal ini, yang akan digunakan adalah rumus U_n karena perhitungannya lebih sederhana.

$$U_n = U_1 + (n-1)b$$

$$U_{10} = U_1 + (10-1)b$$

$$150.000 = 1.050.000 + 9b$$

$$150.000 - 1.050.000 = 9b$$

$$-900.000 = 9b$$

$$b = \frac{-900.000}{9}$$

$$b = -100.000$$

Tanda negatif pada nilai b di atas menandakan bahwa nilai suku-suku dalam barisan tersebut semakin turun. Contohnya

$$U_2 = U_1 + b = 1.050.000 + (-100.000) = 950.000,$$

$$U_3 = U_2 + b = 950.000 + (-100.000) = 850.000,$$

$$U_4 = U_3 + b = 850.000 + (-100.000) = 750.000,$$

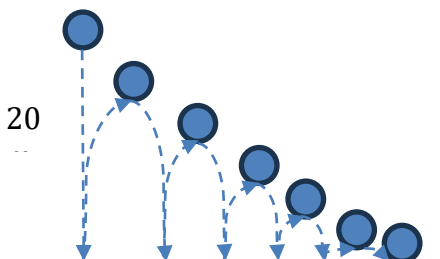
dan seterusnya.

Jadi, selisih nominal hadiah antarperingkat yang berdekatan adalah Rp100.000.

12.3 Aplikasi Barisan dan Deret Geometri

12.3.1 Contoh Menghitung Jarak Tempuh Pantulan Bola

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 20 meter. Setiap bola tersebut jatuh ke lantai, bola akan memantul kembali sejauh satu pertiga dari jarak ketinggian sebelumnya. Hitunglah total jarak tempuh selama bola tersebut memantul.



Gambar 12.1. Ilustrasi bola memantul
(Sumber : Dokumen pribadi)

Penyelesaian:

Karena setiap bola memantul, ketinggian pantulan bola menjadi $\frac{1}{3}$ kali dari ketinggian bola sebelumnya, maka dapat ditulis ketinggian semula (U_1) = 20 meter, ketinggian kedua

$$(U_2) = 20 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \text{ meter, ketinggian ketiga } (U_3) =$$

$$\frac{20}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{9} \text{ meter, dan seterusnya, sehingga barisan ketinggian}$$

bola tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio (r) = $\frac{1}{3}$.

Total jarak tempuh bola selama memantul merupakan jumlahan dari ketinggian bola setiap bola memantul. Karena tidak diketahui berapa kali bola memantul hingga bola berhenti, maka $n = \infty$.

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} S_{\infty} &= \frac{U_1}{1-r} \\ &= \frac{20}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{20}{\frac{2}{3}} \\ &= 20 \times \frac{3}{2} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Jadi, total jarak tempuh bola selama memantul hingga berhenti adalah 30 meter.

12.3.2 Contoh Terkait Perkembangbiakan Bakteri

Suatu wadah mula-mula berisi 3000 bakteri yang jumlahnya akan bertambah 4% setiap jamnya. Berapakah banyaknya bakteri yang ada di dalam wadah tersebut setelah 6 jam?

Penyelesaian:

Karena setiap jam banyaknya bakteri akan bertambah 4% dari banyaknya bakteri sebelumnya, maka

banyaknya bakteri semula (U_1) = 3000

banyaknya bakteri setelah 1 jam (U_2) = $3000 + (3000 \times 4\%)$
 $= 3000 \times (1 + 4\%) = 3120$

banyaknya bakteri setelah 2 jam (U_3) = $3120 + (3120 \times 4\%)$
 $= 3120 \times (1 + 4\%) = 3244,8$

dan seterusnya.

Diperoleh bahwa barisan jumlah bakteri tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio $r = 1 + 4\% = 1 + 0,04 = 1,04$.

Banyaknya bakteri yang ada di dalam wadah setelah 6 jam merupakan suku ke- n dengan $n = 7$ (karena setelah 6 jam artinya periode waktunya mulai memasuki jam ke-7), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}U_n &= U_1 \cdot r^{n-1} \\U_7 &= 3000 \cdot (1,04)^{7-1} \\&= 3000 \cdot (1,04)^6 \\&\approx 3000 \cdot (1,265) \\&= 3795\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya bakteri yang ada di dalam wadah setelah 6 jam sekitar 3795 bakteri.

12.3.3 Contoh Terkait Kenaikan Gaji dalam Persen

Suatu perusahaan memberikan gaji sejumlah Rp60.000.000 untuk satu tahun pertama dengan kenaikan sebesar 5% setiap tahun.

- Tentukan banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-9.
- Hitunglah total gaji yang diperoleh selama 10 tahun pertama.

Penyelesaian:

Kenaikan gaji dalam contoh ini berbentuk persen yang nominal kenaikan gajinya diperoleh dari persentase kenaikan gaji dikalikan dengan nominal gaji sebelumnya. Oleh karena itu, nominal kenaikan gaji pada setiap periode akan berbeda. Sedangkan bagian yang sama/konstan adalah persentase atau bilangan pengali untuk nominal gaji sebelumnya, sehingga nominal gaji yang diperoleh setiap tahun membentuk barisan geometri.

Gaji yang diperoleh setiap tahun dapat dituliskan sebagai berikut:

gaji tahun pertama (U_1) = Rp60.000.000

gaji tahun kedua (U_2) = Rp60.000.000 + (5% × Rp60.000.000)

$$\begin{aligned}
&= \text{Rp}60.000.000 \times (1+5\%) \\
&= \text{Rp}63.000.000 \\
\text{gaji tahun ketiga } (U_3) &= \text{Rp}63.000.000 + (5\% \times \text{Rp}63.000.000) \\
&= \text{Rp}63.000.000 \times (1+5\%) \\
&= \text{Rp}66.150.000, \text{ dan seterusnya.}
\end{aligned}$$

- a. Menentukan banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-9 berarti menghitung U_n dengan $n=9$ dan rasio $r=1+5\%=1+0,05=1,05$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
U_n &= U_1 \cdot r^{n-1} \\
U_9 &= 60.000.000 \times (1,05)^{9-1} \\
&= 60.000.000 \times (1,05)^8 \\
&\approx 60.000.000 \times (1,477) \\
&= 88.620.000
\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya gaji yang diperoleh pada tahun ke-9 sekitar Rp88.620.000.

- b. Menghitung total gaji selama 10 tahun pertama berarti menghitung S_n dengan $n=10$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{U_1(r^n - 1)}{r - 1} \\
S_{10} &= \frac{60.000.000 \times [(1,05)^{10} - 1]}{1,05 - 1} \\
&\approx \frac{60.000.000 \times (1,63 - 1)}{0,05} \\
&= \frac{60.000.000 \times 0,63}{0,05} \\
&= 756.000.000
\end{aligned}$$

Jadi, total gaji yang diperoleh selama 10 tahun pertama sekitar Rp756.000.000.

12.3.4 Contoh Terkait Penurunan Nilai Barang

Suatu mobil keluaran terbaru mula-mula memiliki harga jual sebesar Rp250.000.000. Akan tetapi, setiap tahun mobil

tersebut akan mengalami depresiasi (penurunan nilai barang) sebesar 15% dari nilai atau harga jual mobil pada satu tahun sebelumnya. Berapakah harga jual mobil tersebut setelah 10 tahun?

Penyelesaian:

Penurunan harga jual mobil tersebut berupa persentase yang nominalnya diperoleh dengan mengalikan persentase dengan harga jual mobil pada tahun sebelumnya. Seperti contoh soal sebelumnya, nominal penurunan harga jual mobil ini setiap tahunnya akan membentuk barisan geometri dengan rasio konstan/tetap.

Harga jual mobil setiap tahun dapat dituliskan sebagai berikut:

harga jual semula pada awal tahun pertama (U_1) =

Rp250.000.000

harga jual setelah 1 tahun/awal tahun ke-2 (U_2)

$$= \text{Rp}250.000.000 - (15\% \times \text{Rp}250.000.000)$$

$$= \text{Rp}250.000.000 \times (1-15\%)$$

$$= \text{Rp}212.500.000$$

harga jual setelah 2 tahun/awal tahun ke-3 (U_3)

$$= \text{Rp}212.500.000 - (15\% \times \text{Rp}212.500.000)$$

$$= \text{Rp}212.500.000 \times (1-15\%)$$

$$= \text{Rp}180.625.000, \text{ dan seterusnya.}$$

Menentukan harga jual mobil setelah 10 tahun berarti menghitung U_n dengan $n=11$ (karena setelah 10 tahun artinya

mulai memasuki tahun ke-11) serta rasio

$r = 1 - 15\% = 1 - 0,15 = 0,85$, maka

$$U_n = U_1 \cdot r^{n-1}$$

$$U_{11} = 250.000.000 \times (0,85)^{11-1}$$

$$= 250.000.000 \times (0,85)^{10}$$

$$\approx 250.000.000 \times (0,197)$$

$$= 49.250.000$$

Jadi, nilai atau harga jual mobil tersebut setelah 10 tahun sekitar Rp49.250.000.

DAFTAR PUSTAKA

- CGP Books (2017) *A-Level Year 2 Mathematics Exam Board: AQA*.
Edited by C. Corrall et al. Coordination Group
Publications Ltd. (CGP).
- Gray, P. and Harris, D. (2021) *Oxford IB Prepared Mathematics:
Applications and Interpretation IB Diploma Programme*.
Oxford: Oxford University Press.
- Harrison, R. et al. (2017) *MYP Mathematics 4 & 5 Extended*.
Oxford: Oxford University Press.
- Stewart, J. et al. (2024) *Precalculus: mathematics for calculus*.
8th edn. Boston: Cengage Learning, Inc.

BIODATA PENULIS



Yenny Anggreini Sarumaha, S.Pd., M.Sc.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan
dan Ilmu Pendidikan

Penulis lahir di Padang tanggal 22 Januari 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Cokroaminoto Yogyakarta. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang dan melanjutkan S2 pada Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sriwijaya.

BIODATA PENULIS



Hetty Elfina, S.Pd., M.Pd

Dosen Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik dan Ilmu
Komputer
Universitas Pembinaan Masyarakat Indonesia Medan

Penulis lahir di kota Sibolga pada tanggal 07 Januari 1990. Penulis merupakan dosen tetap pada Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer, Universitas Pembinaan Masyarakat Indonesia, Medan. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Medan tahun 2013 dan melanjutkan S2 pada tahun yang sama di Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Medan dan lulus tahun 2015. Penulis telah menulis 5 buku, yaitu Kalkulus, Statistika Pendidikan, Teori Bilangan, Metodologi Penelitian, dan Statistika.

BIODATA PENULIS



Farida Daniel, S.Si., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Institut
Pendidikan Soe

Penulis lahir di Soe tanggal 16 Februari 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, Institut Pendidikan Soe. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknik Universitas Nusa Cendana tahun 2012, pada tahun 2013 melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang dan lulus tahun 2015. Penulis sementara melanjutkan studi S3 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia. Penulis menekuni bidang pendidikan matematika khususnya statistika, matematika terapan, analisis dan etnomatematika dalam pelaksanaan tridharma perguruan tinggi. Buku Ajar yang pernah ditulis antara lain Kalkulus Integral Berbasis Maple (2018), Teori Graf (2019), dan Teori Peluang (2023).

BIODATA PENULIS



Syahrani Sirait

Dosen tetap pada program studi Pendidikan matematika
Universitas Asahan

Syahrani Sirait, lahir di Sei Alim Hasak, 02 Agustus 1988, anak pertama dari pasangan bapak Idris Sirait, A.Mpd dan Ibu Rusmi. Sejak Tahun 2014 penulis merupakan salah satu dosen tetap pada program studi Pendidikan matematika Universitas Asahan yang terletak pada kecamatan kota kisan Timur, Kabupaten Asahan, Provinsi Sumatera Utara. Selama menjadi dosen tetap, penulis aktif melaksanakan kegiatan Pendidikan dan pengajaran, penelitian dan publikasi ilmiah serta pengabdian kepada masyarakat di bidang Pendidikan khususnya Pendidikan matematika. Pendidikan Dasar di SD Negeri 010246 Banjar selesai tahun 2000, melanjutkan sekolah di SMP N 1 Air Joman selesai tahun 2003, kemudian melanjutkan sekolah di SMAN 1 Kisan dan selesai tahun 2006. Pendidikan tinggi yang telah ditempuh adalah program sarjana program studi Pendidikan matematika Universitas Negeri Medan dan selesai tahun 2011 dengan judul skripsi “Penerapan Metode *Stop Think Do* untuk meningkatkan Motivasi Belajar Siswa Pada Pokok Bahasan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel di kelas VIII SMP N 1 Silau Laut Asahan Tahun Ajaran 2010/2011”, melanjutkan ke program magister Pascasarjana Universitas Negeri Medan pada program studi Pendidikan matematika dengan judul

tesis “ Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe *Group Investigation* GI terhadap Kemampuan Pemahaman Konsep dan Komunikasi Matematika Siswa SMA di Kota Kisaran” dan pada tahun 2021 sampai sekarang melanjutkan Pendidikan di program Doktor program studi Pendidikan Matematika UNIMED. Universitas Negeri Medan.

BIODATA PENULIS

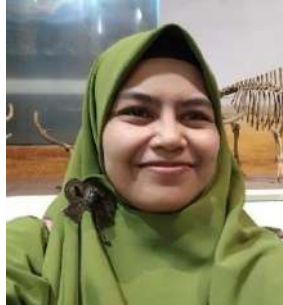


Nurul Ainun Fajriah, S.Pd.

Mahasiswa S2 Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Soppeng tanggal 7 September 1998. Saat ini sedang menempuh Pendidikan magister Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta. Gelar sarjana diperolehnya di UIN Alauddin Makassar jurusan Pendidikan Matematika. Selama menjalani perkuliahan, baik sarjana maupun magister, penulis berkesempatan mendapatkan beasiswa dari pemerintah. Selain aktif sebagai mahasiswa, penulis juga telah mengikuti beberapa penulisan buku kolaborasi lainnya, diantaranya Filsafat Pendidikan matematika, matematika untuk perguruan tinggi, landasan Pendidikan, dan media dan ICT dalam pembelajaran matematika.

BIODATA PENULIS



Vini Rizqi S.Pd., M.P.Mat

**Dosen Program Studi Akuntansi Fakultas Ekonomi
Universitas Nurtanio Bandung**

Lahir di Kota Bandung 12 September 1988. Penulis telah menyelesaikan Magisternya di Institut Teknologi Bandung jurusan Pengajaran Matematika dan saat ini bekerja sebagai dosen tetap Akuntansi untuk matakuliah Matematika Ekonomi dan Statistika di Universitas Nurtanio Bandung, serta turut berpartisipasi aktif dalam salahsatu organisasi pemikiran di Bandung. Selama menjadi dosen, penulis telah menghasilkan beberapa karya buku kolaborasi dan beberapa jurnal penelitian.

BIODATA PENULIS



Rahma Faelasofi, S.Si., M.Sc.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas
Keguruan dan Ilmu Pendidikan UMPRI

Penulis adalah Rahma Faelasofi, lahir di Tanjung Karang Barat pada tanggal 2 Februari 1985, merupakan anak keempat dari lima bersaudara, dari pasangan H. Sunanto (alm) dan Hj. Siti Chotijah. Semasa kecil melewati jenjang Pendidikan di SD N 8 Gedong Air pada tahun 1991 – 1997, SMP N 16 Bandar Lampung 1998 – 2000, SMA N 3 Bandar Lampung 2001 – 2003, selanjutnya melanjutkan S1 di Universitas Lampung tahun 2004 – 2007 dan melanjutkan S2 di Universitas Gadjah Mada pada tahun 2008 – 2010. Riwayat pekerjaan adalah dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Pringsewu (UMPRI) pada tahun 2010 sampai sekarang. Amanah yang pernah diemban adalah sebagai staf Pusat Penjaminan Mutu 2014 - 2018, kepala Pusat Penjaminan Mutu 2018 – 2019, dan Dekan FKIP UMPRI tahun 2019-2023. Saat ini, penulis sedang menempuh studi lanjut S3 di Universitas Lampung.

BIODATA PENULIS



Marzuki Ahmad, S.Pd., M.Pd.

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan MIPA Institut Pendidikan Tapanuli Selatan

Marzuki Ahmad, S.Pd., M.Pd. lahir di Laru Lombang, 18 September 1988. Penulis merupakan Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Pendidikan MIPA Institut Pendidikan Tapanuli Selatan. Saat ini penulis tinggal di Kota Padangsidimpuan. Pendidikan tinggi ditempuh mulai dari S-1 adalah Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Islam Sumatera Utara (UISU) Medan (lulus 2010), S-2 Prodi Pendidikan Matematika di Program Pascasarjana Universitas Negeri Medan (UNIMED) Medan (lulus 2014). Selain pendidikan, penulis telah memiliki pengalaman sebagai tugas Dosen pada perguruan tinggi Institut Pendidikan Tapanuli Selatan selama sepuluh tahun. Dalam tugas tersebut penulis senantiasa melaksanakan tridharma perguruan tinggi yang meliputi pengajaran, penelitian dan pengabdian kepada masyarakat baik tingkat lokal maupun nasional.

BIODATA PENULIS



Hasniati, S.Si., M.Si.

Dosen Program Studi Teknik Informatika STMIK KHARISMA
Makassar

Penulis merupakan lulusan dari program studi S1 dan S2 Matematika Universitas Hasanuddin. Setelah menyelesaikan studi S1 pada tahun 2009, penulis menjadi tenaga pengajar di STMIK KHARISMA Makassar. Penulis telah mempublikasikan lebih dari 20 artikel ilmiah baik nasional maupun internasional. Penulis menekuni bidang Menulis baru pada Tahun 2023. Buku Chapter ini adalah buku keempat yang penulis tekuni. Saat ini penulis menjabat sebagai kepala pusat penelitian dan pengabdian kepada masyarakat di STMIK KHARISMA Makassar.

BIODATA PENULIS



Kirtyana Nindita, S.Si., M.Sc.
Dosen Program Studi Nautika
Politeknik Maritim Negeri Indonesia

Penulis lahir di Pasuruan tanggal 7 Mei 1991. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Nautika, Politeknik Maritim Negeri Indonesia. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Matematika dan melanjutkan S2 Matematika, keduanya pada Universitas Gadjah Mada. Penulis merupakan dosen pengampu utama mata kuliah Matematika Terapan pada Program Studi D3 Nautika dan Program Studi D4 Nautika kelas reguler, serta mata kuliah *Applied Mathematics* dan *Mathematics and Statistics* pada Program Studi D4 Nautika kelas *joint degree*.